比较数学史丛书

阿拉伯数学的兴衰

A LA BO SHU XUE
DE XING SHUAI

包芳勋 孙庆华／著

山东教育出版社

责任编辑：霍　亮 孙金栋
封面设计：祝玉华

阿拉伯数学的兴衰

本书就阿拉伯数学中的一些问题，如开方和方程的数值解法、多项式理论和二项式定理、方程论等展开讨论。一方面考察了中世纪阿拉伯在这方面的成就、特点及发展脉络，另一方面做了纵向和横向的比较，特别是与古希腊、印度、中国之间同类成就的比较。

ISBN 978-7-5328-6047-0



定价：19.00元

·比较数学史丛书·

阿拉伯数学的兴衰

包芳勋 孙庆华\著

A LA BO SHU XUE

DE XING SHUAI

山东教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

阿拉伯数学的兴衰/包芳勋,孙庆华著.—济南:山东教育出版社,2009
(比较数学史丛书)
ISBN 978-7-5328-6047-0

Ⅰ.阿… Ⅱ.①包…②孙… Ⅲ.数学史—阿拉伯半岛地区 Ⅳ.O113.71

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第028171号

总 序

比较研究(comparative studies)在国际学术界是一个热门词,大凡运用比较分析的方法来探讨研究某一领域的问题,都属于比较研究的范畴. 用比较分析的方法研究数学史,就形成所谓比较数学史. 比较数学史,确切地说并不是数学史的一个分支,而是一个由方法论界定的范畴.

数学是人类文化的重要组成部分,数学的发展在历史上呈现出多元文化的特征. 也就是说,数学发展至今日,包涵融汇了世界古今不同民族、不同国家和地区的文化贡献. 对历史上不同文化的数学贡献、成就、特点与风格进行比较研究和分析论述,不仅对于全面了解数学发展的历史实属必要,而且将能展示数学科学丰富多彩的文化内涵和数学发展的深刻复杂的动力因素.

那么比较数学史是不是仅限于不同民族、国家和地区数学发展的比较研究呢? 不是的,那只是狭义的理解. 比较数学史具有更为广阔的内涵. 除了不同民族、国家和地区的比较,比较数学史至少还应包括以下方向:

不同时代数学的比较. 数学是历史最悠久的人类知识领域之一. 数学的发展经历了不同的历史时期,通过不同时期数学内容、特征的比较,可以弄清数学进化的脉络,特别是古今比较,用现代数学的方法去解读一些古代数学成就,往往会引导重要的数学史发现.

同时代数学的比较. 对同一时代及前后相近时代数学知识进行比较分析,概括出一些共同的特征,是正确复原该时代数学发展本来面貌的有效途径,甚至能提供解开某些历史谜团的钥匙.

不同数学家的比较. 数学家创造数学的历史,对不同数学家研究工作的内容、方法、风格、特征等进行比较分析,尤其是关于同一主题(如解析几何、微积分等)不同数学家贡献的比较,对了解数学家们的创新思维、廓清数学学科起源与发展的客观过程具有毋容置疑的意义.

在上述广义的理解下,比较研究可以说是数学史研究必不可少的基本手段. 数学史研究上一些突破性进展,包括新观点的提出、新结论的获得、新史料的解释等等,都离不开比较方法的运用. 让我们来考察几个经典的例子.

李约瑟博士的巨著《中国科学技术史》第三卷数学部分，堪称跨文化比较数学史的典范.作者以其特有的贯通中西的学术文化背景，展开了中国古代数学与古代巴比伦、希腊、印度、阿拉伯地区乃至意大利等欧洲国家数学的空前广泛深入的比较分析，令人信服地论证了中国古代数学的独立地位，纠正了西方学界的一些传统偏见.

17世纪以后来华的西方传教士们曾经用当时的欧洲数学知识解读中国古代数学著作，发掘并向西方知识界介绍了包括著名的“中国剩余定理”在内的一些中国古代数学成果.20世纪初，李俨、钱宝琮等开始了系统的现代意义上的中国数学史研究，运用现代数学方法揭示了一系列中国古代数学成果的世界意义.钱宝琮主编的《中国数学史》可以看作是这方面的代表作.像祖暅原理及球体积计算的诠释，已经成为脍炙人口的佳篇.

另一个方向的例子是吴文俊的古证复原原则.吴文俊先生指出：不加限制地搬用现代西方数学符号与语言来理解中国或其他文明的古代数学将会导致误解.他提出了研究古代数学史的方法论原则，主张所有结论应该利用古人当时的知识、辅助工具和惯用的推理方法得出.这实际上就是强调要把古代数学成果放到当时或前后相近时代的背景中去比较分析.吴文俊先生运用此原则复原了刘徽海岛公式、赵爽日高公式、秦九韶三角形面积公式等.其后国内外许多学者竞相效法，在中国古代数学史研究领域获得了大量成果，取得了大刀阔斧的进展.

至于不同数学家之间的比较，最有名的例子就是牛顿与莱布尼茨创立微积分工作的比较.这方面的研究不仅澄清了牛顿与莱布尼茨各自独立创立微积分的历史真相，而且向人们展示了这两位伟大的学者鲜活的创新思维.

借用一句俗语：“不怕不识货，只怕货比货.”在占有一定史料的基础上，比较分析乃是数学史研究获得真知灼见、取得实质性进展的重要法宝.这里强调以史料为基础，因为缺乏史料的高谈阔论，终究是基础不稳的空中楼阁.但另一方面，不加理论研究的史料，很可能变成沉默的古董，即使知其为宝，也不识宝在何处.君不见《九章算术》(包括其注文)中一些精华的段落，历数千余年沧桑，直到20世纪经现代解读才大放异彩!

因此，比较研究是数学史研究中既历久又摩登的范畴.凡是有意义的数学史进展与成果，都在不同程度或不同方面涉及比较方法的运用.当然，认识其重要是一回事，能成功地运用又是一回事.至于收获的大小，就要看研究者各人的

眼力、智慧和功底了. 正因为如此,对于数学史工作者来说,比较研究既给人以机会,也提出了挑战. 笔者高兴地看到,国内对比较数学史的关注在近十年来有较大的增长,一批中青年学者做了大量深入的工作并有可喜成果,其中有些已引起国际同行的瞩目. 将这些成果整理出来,以丛书的形式发表,将能反映我国近年来在这方面的部分成果,激励青年学者的研究积极性,产生良好的学术效果. 同时,由于国内目前基本上找不到系统介绍有关民族和地区(如阿拉伯、印度、日本以及古希腊等)数学的专著(连译著都很少见),这一丛书的出版,将能从比较史的角度,部分满足国内学术界在这方面的学术兴趣与需求.

首批出版的《比较数学史丛书》著作涉及古代和中世纪阿拉伯、朝鲜半岛、日本、古希腊等民族和地区数学的成就、文化背景,并与中国传统数学进行比较,探讨它们之间的相互交流与影响. 丛书中还包括了清代学者画法几何著作的比较研究、行列式理论历史的比较研究等. 今后我们还将继续扩大研究范围,在条件成熟时推出更多新的比较数学史研究成果.

数学史是一个广阔的研究领域,"海阔凭鱼跃,天高任鸟飞". 然而惟其广阔,把握方向就尤显重要. 希望本丛书的出版,能在推动国内数学史研究、引导有意义的成果方面起到一定的作用.

本丛书中部分作品是吴文俊丝绸之路数学与天文基金资助项目成果,笔者谨向吴文俊院士表示衷心的感谢. 长期以来,山东教育出版社对于数学史学术著作的出版给以了难能可贵的支持,笔者愿借此机会向孙永大社长和本丛书编辑霍亮同志表示诚挚的谢意.

李文林

2009 年 1 月 30 日于北京中关村

前言

一种传统的观点认为，阿拉伯人在数学上没有做出什么重要的推进，他们所做的只是吸收了希腊和印度的数学，把它们保留下来，并最终传给欧洲.①实际上，阿拉伯人②在数学上的贡献，并非仅限于对希腊和印度数学的吸收和保存，他们在代数学、几何学、三角学等领域都做出了重要的贡献. 当然，“文艺复兴以前的数学著作，在成就上是几乎无法同后来所取得的丰富而有效的发展相比的”.③如果我们用现代数学的尺度去衡量中世纪阿拉伯数学的贡献，似乎是毫无意义的. 另外，在 13 世纪之后，以至于整个文艺复兴时期，欧洲人所收集、翻译和吸收的是大量的希腊数学著作，而阿拉伯人的数学著作中则仅有少量的为欧洲人所了解.④直到很晚的时代，一些阿拉伯人的数学著作才逐渐为欧洲人所知，⑤大量阿拉伯数学著作被发掘研究则是 19 世纪后期、20 世纪的事. 因此，以现代数学的观点去评判阿拉伯人的成就对于现代数学发展的影响和作用也是片面的、不可取的，只有将中世纪阿拉伯人的数学工作与其他文明——早期希腊、同时期或之前的中国和印度等的数学工作进行比较，才能做出客观、公正的评价. 毫无疑问，如果没有 8 世纪下半叶的伊斯兰文化的突然觉醒，大量的古

---

① M. 克莱因：《古今数学思想》(第一册)，上海科学技术出版社，1979，第 224 页. 另外，数学史家 D. V. Smith 等也持这种观点，参见 D. V. Smith, *History of Mathematics*, Vol. 1, Ginn and Company, 1923, p. 177.

② 这里的“阿拉伯人”泛指阿拉伯帝国统治下的各个不同的民族，包括希腊人、花拉子模人、波斯人、叙利亚人、摩尔人以及犹太人等.

③ 李约瑟：《中国科学技术史》，科学出版社，1978，第 334 页.

④ 公元 1183 年，花拉子米的著作《代数学》被从阿拉伯文译成拉丁文. 该书传入欧洲后，在相当长一段时间中一直被用作课本. 曾流传的较著名的版本有：抄录于 1342 年的阿拉伯文手稿(1831 年，F. Rosen 将其译成英文)及 L. Charles Karpinski 根据 Robert of Chester 1831 年翻译的拉丁文本编译的版本.

⑤ 如奥马·海亚姆的代数学著作 1742 年随着 Gerard Meerman 的著作 *Speciman Calculi Fluxionalis* 在 Leyden 的出版为人们所知，但直到 1851 年，才真正引起欧洲学者的普遍关注；萨马瓦尔的工作则在 20 世纪 70 年代才真正为人们所了解；等等.

代科学和数学知识已经失传.之后不同的时期,巴格达、科瓦尔多、布哈拉、花拉子模、撒马尔罕等诸多城市成为重要的科学中心,阿拉伯人通过各种途径组织收集了大量的希腊和印度的数学和天文学著作,并有大批的叙利亚、伊朗、美索不达米亚、印度等地的学者聚集或被延聘到这些地方,其中不乏相当出色的翻译人员,他们把大量的各种文献译成阿拉伯文.在翻译过程中,他们对许多文献重新进行了校订、考证、勘误、增补和注释.这些文献中包括欧几里得(Euclid, c. 375—c. 325 B. C.)、阿基米德(Archimedes, 287—212 B. C.)、阿波罗尼奥斯(Apollonius, c. 262—190 B. C.)、梅内劳斯(Menelaus, c. 100 B. C.)、托勒密(Ptolemy, c. 90—168)和丢番图(Diophantus, c. 250)等希腊著名学者的数学和天文学著作,还有印度数学家和天文学家的著作等.这些阿拉伯译本后来成为欧洲人了解古希腊数学的主要来源.因此,阿拉伯人在对希腊和印度的科学和数学知识的保存上是功不可没的.另外,阿拉伯人并非希腊数学的简单模仿者,他们在代数学、几何学和三角学等领域都做出了重要的贡献.在代数学方面,他们首次把代数学作为一门独立的科学,给出了一次方程、二次方程的一般解法,一般三次方程的几何解法,建立了开高次方的数值方法——西方所谓鲁非尼一霍纳算法,并给出了二次方程、三次方程的数值解法,首次较为系统地论述了代数多项式理论和二项式定理等.几何学方面,阿拉伯学者哈岑(Alhazen, c. 965—1039)、奥马·海亚姆(Omar Khayyam, c. 1048—c. 1131)、纳西尔丁·图西(Nasīr al-Din al-Tūsī, 1201—1274)等对欧几里得第五公设的证明做了较早的尝试,卡西(al-Kashi, ? —1429)利用圆内接和外切正多边形将圆周率精确到小数点后 17 位.三角学方面,他们引入了几种新的三角函数,如阿布·瓦法(Abūal-Wafa, 940—998)首先将正切、余切作为独立的函数,而不是正弦和余弦的比值;首次引入了正割和余割;建立了若干三角函数关系式,并给出了许多三角公式的证明.巴塔尼(al-Battani, c. 858—929)发现了球面三角余弦定理

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

阿拉伯人还编制了大量的三角函数表,而纳西尔丁在《论完全四边形》(*Kashf al-qinafi asrārshakl al-qītā*)中对平面三角形作了系统的论述,使得三角学开始脱离天文学而成为独立的学科.①

① 纳西尔丁的工作直到 15 世纪才为欧洲人所知,数学史家苏特曾感慨地说:“假如 15 世纪欧洲的三角学者早知道他们的研究,不知还有没有插足的余地.”

近来，随着对大量既有文献（如萨马瓦尔（al-Samawal，？—c. 1180）和沙拉夫丁·图西（Sharaf al-Din al-Tūsī，？—1213/1214）等的代数学著作）研究的进一步深入和新文献不断被发现和研究，人们对看待阿拉伯数学的传统观念产生了疑问，开始从历史的比较研究的角度以客观的标准重新认识阿拉伯数学，重新评价它的成就和贡献. 在德国、法国、美国、俄罗斯、乌兹别克斯坦、哈萨克斯坦、塔吉克斯坦等国家，活跃着一批从事中世纪阿拉伯数学研究的数学史家，并建立了专门的研究机构. 对于大量既有文献，如花拉子米（al-Khowārizmī，c. 780—c. 850）、比鲁尼（al-Bīrūnī 或 Bērūnī，973——1050）、纳西尔丁以及奥马·海亚姆等的著作，数学史工作者们从其思想来源、成就、思想方法和影响等方面进行了进一步的探讨，其中也包括纵向和横向的部分比较；对于新的文献，则主要集中在考证、成就和思想方法的研究、与近现代数学关系的研究等诸多方面. 事实上，研究发现，阿拉伯数学在对希腊、印度数学保存和吸收的同时，在许多方面也做出了同时代不逊于其他国家的卓越成就. 这种观点已经为越来越多的学者所接受.

然而，以往的比较研究主要是在阿拉伯、印度、希腊和文艺复兴的欧洲之间进行，即使偶有涉及中国，也相对比较简单，多是指出二者之间影响和交流存在的可能性.①针对阿拉伯数学研究的现状，吴文俊教授曾大声疾呼，倡导在国内展开对阿拉伯数学史的研究.②作者正是受到这一高瞻远瞩的倡导的影响而投身于阿拉伯数学史研究领域的. 在对阿拉伯数学进行探讨的过程中，作者发现了阿拉伯数学著作与中国古代数学著作中的诸多相似或相同的内容，这种相似或相同不仅仅是形式上的，更多是过程、思想和方法本质上的. 另外，作者在资料的搜集和阅读过程中，产生了将阿拉伯数学与希腊、印度、中国、文艺复兴的欧洲以至于古代巴比伦、埃及的数学进行全面比较研究的想法. 本书将主要就阿拉伯代数学中的一些问题展开讨论，主要工作涉及到下面几个部分：

（1）开方和方程的数值解法；

（2）多项式理论和二项式定理；

（3）方程论.

一方面考察了中世纪阿拉伯在这些方面的成就、特点及发展的脉络；另一方面，

---

① 钱宝琮、杜石然、李约瑟等的作品中都曾提及，后文将具体介绍.

② 在 1993 年中国科学院数学所举办的"中外比较数学史讨论班"和 1994 年香山"第四届数学史年会"上，作者作为会议成员两次聆听吴文俊教授的这一倡导.

做了纵向、横向的比较，即阿拉伯内部不同时期学者的工作比较以及阿拉伯与希腊、印度、中国之间同类成就的比较（特别是阿拉伯和中国之间在代数学方面存在的诸多相似和相同之处）. 这种同类成就的比较不仅仅局限于其形式，更在于这些成就中蕴含的方法、过程及特点. 书中整理出了从古代到文艺复兴时期代数学发展的几条线索，通过比较指出了阿拉伯代数学的可能思想来源（即希腊思想的影响和东方传统），重新评价了它在代数学发展中的成就和地位，也从侧面说明应如何看待中国古代数学在世界数学中的地位，以及它对近现代数学的影响. 另外，虽然在几何学与三角学方面，阿拉伯与中国之间的联系远不如代数学方面密切，但为了保证该书内容的完整性和系统性，作者对阿拉伯学者在这两个方面的主要成就也做了简略叙述，以供读者参考. 再者，由于中国古代学者和阿拉伯学者在插值法方面的工作极为类似，虽然这部分内容不属于代数学，但作者还是将阿拉伯插值法作为本书的最后一章内容.

作者挑选阿拉伯代数学这一课题进行研究是一个初步的尝试，由于作者的研究主要依靠了英文版的阿拉伯文献，掌握的研究文献与资料有限，挂一漏万和不妥之处难免. 疏漏谬误之处，敬请读者指正.

目录

MU LU

第一章　引　论

历史背景

阿拉伯半岛南北自然条件差异很大.半岛的西南隅,土地肥沃,雨量充沛,适宜于农业耕作,居住在那里的人们以农业生产为主.而中部和北部,多是炎热干旱的沙漠、半沙漠,自然条件十分艰苦,主要是游牧民生活的地方.总的来说,阿拉伯半岛大部分地区土壤硗薄,气候炎热干旱,不利于农作物生长.生活在这里的阿拉伯人直到 6 世纪还大都过着蒙昧贫困的生活,统一和扩张逐渐成为他们的愿望.伊斯兰教的产生和传播为阿拉伯的统一和强大奠定了思想基础.

穆罕默德(Muhammad, c. 570—632)是伊斯兰教的先知.他出生于麦加,从小未受过教育,曾多次参加商队贸易,到过叙利亚和巴勒斯坦等地.在旅行期间,他接触了犹太教和基督教,混合的宗教意识在他的头脑中产生,使他认为真主安拉是唯一的神,而他自己则是安拉的使者,所有创造的化身,被派遣来领导他的人民.公元 613 年,穆罕默德在麦加公开传教.公元 622 年,他应邀到了麦地那,这标志着穆罕默德时代的到来.从此之后,穆罕默德成为宗教和军事的领袖,并在麦地那建立了政教合一的国家——阿拉伯部落联盟.几年的时间,穆斯林几乎征服了整个阿拉伯半岛.公元 632 年,正当穆罕默德计划对拜占庭帝国采取行动时,他却不幸在麦地那去世,但这并没有妨碍伊斯兰国家的扩张.他的后继者们被称为"哈里发",最初几任是从穆罕默德的亲信中选出的,集政治、宗教、军事领导权于一身.他们以惊人的速度吞并了邻邦的领土.短短几年之内,征服了大马士革、耶路撒冷和美索不达米亚流域等的大片土地.公元 641 年,穆斯林攻占了多年来一直是世界数学中心的拜占庭首都亚历山大城,城中号称当时世界上藏书量最大的图书馆中的图书几乎被入侵者劫掠一空.至约公元 750 年,经过一个多世纪的不断征战和扩张,阿拉伯人统治了包括地中海沿岸的所有非洲国家,两河流域、印度以北直到中国的西部边界的广大地区以及埃及、北

非沿岸直到跨海的西班牙境内的大片领土，形成了地跨亚、非、欧三洲的庞大的阿拉伯帝国. 之后，他们这种好斗的精神逐渐平静下来，哈里发统治下的各区域也逐渐分裂. 在摩洛哥城形成西部阿拉伯，东部阿拉伯则在哈里发曼苏尔(al-Mansur)的率领下建都巴格达，巴格达迅速成为新的科学中心.

阿拉伯科学文化的来源

阿拉伯人征服的地区大都是经济和文化上相对先进的地区，在阿拉伯征服者向这些地区输入伊斯兰教和阿拉伯语的同时，也保存和吸收了这些地区先进的科学遗产和文化传统，这使得希腊、伊朗、印度和中亚各民族的科学文化得以继续发展. 事实上，到了大约公元 750 年，即阿拉伯的对外扩张热潮渐渐冷却下来时，阿拉伯人才真正开始准备书写他们自己的历史，统治者们开始渴望接受、吸收他们已经征服地区的文明来发展自己的文明.

阿拉伯科学文化的来源是多方面的. 希腊文化是其主要来源之一. 早在公元 529 年，柏拉图学园被查封时，许多学者跑到波斯，在那里滋荣了希腊文化，这一文化后为阿拉伯文化所融合. 阿拔斯王朝的哈里发曾专门派人从拜占庭搜集购买过大量的希腊手稿；阿拉伯军队攻占亚历山大城之后，又从那里劫掠了大量的书籍，这些手稿与书籍后来成为阿拉伯人发展自己文化的重要基础. 印度文化是阿拉伯文化的另一重要来源. 滞留在阿拉伯地区中的许多印度人，不仅将他们在印度学到的知识传授给阿拉伯人，同时给阿拉伯地区带来了大量的印度著作，这些都很好地滋育了阿拉伯科学文化. 阿拉伯人征服伊拉克、叙利亚、埃及等地区之后，对保存在这里的古代文化采取接受、吸收的态度，它们中的大量优秀成果最终也融为阿拉伯文化的一部分. 阿拉伯地区和中国之间的贸易往来由来已久，而中国和印度之间随着宗教方面的往来，文化交流也早已展开. 因此，中国古代文化也是阿拉伯文化的直接或间接来源之一.(据传，穆罕默德曾提出："学问，虽远在中国，亦当求之.")总之，阿拉伯征服者渴望得到知识的情绪被激起后，他们广泛地吸收了邻邦的科学文化知识.

伊斯兰文化有它孕育、发生、成长和结果等几个不同的发展阶段. 倭马亚王朝的早期(7 世纪中叶至 8 世纪初)，尤其是希腊文化、波斯文化以及其他民族的文化在当地仍占主导地位时，还谈不上独立的伊斯兰文化的存在，它仅处于孕育时期. 从 8 世纪开始，特别是从 8 世纪中叶到 10 世纪的一百多年间，阿拉伯

统治者一方面搜罗大量人才，另一方面也大力搜集、购买其他民族的科学著作，并将它们翻译成阿拉伯文.同时，阿拉伯统治者通过伊斯兰教向被征服民族推行阿拉伯的政策，促进了穆斯林和其他民族的融合.这时，真正的伊斯兰文化才逐渐形成.在这些文化的基础上，经过伊斯兰意识形态的筛选、加工、改造后并予以吸收和发展，伊斯兰文化开始成长和结果.9世纪到12世纪初，是阿拉伯科学、数学极其辉煌的时代.不同时期，巴格达、科瓦尔多、布哈拉、花拉子模、莱茵、伊斯法罕、撒马尔干等城市成为重要的科学中心，集中了各地来的大批学者.在这期间，阿拉伯国家陆续出现了许多杰出的数学家，如花拉子米、泰比特·伊本·库拉(Thābit ibn Qurra，836—901)、巴塔尼、阿布·瓦法、凯拉吉(al-Karaji或al-Karkhi)、伊本·西纳(Ibn Sinā，980—1037)、比鲁尼、哈岑以及奥马·海亚姆等等，他们在数学、天文学、物理学、地理学等领域都做出了突出的贡献.从12世纪初期开始，阿拉伯科学逐渐衰退，虽然在12世纪后期、13和15世纪出现了几位杰出的学者，如纳西尔丁、沙拉夫丁·图西、卡西等，但终未达到其辉煌时期的水平.随着阿拉伯帝国的崩溃，卡西之后，伊斯兰文化急速衰退.因此，也就没有必要再对之后的阿拉伯科学作评述.总的来说，伊斯兰文化中很自然地含有多民族文化的因素，它不是单一民族或纯粹阿拉伯半岛居民——阿拉伯人的文化，而是信仰伊斯兰教的多民族共同创造的文化.

阿拉伯的“翻译运动”

约从8世纪中叶到10世纪的一百多年间，是阿拉伯科学的翻译运动时期.翻译运动一方面使得大量的古代科学和数学知识(特别是希腊的)得以保留下来；另一方面，在伊斯兰文化的形成和发展过程中也起了非常重要的作用.那时的巴格达，从叙利亚、伊朗和美索不达米亚等地延聘了许多学者从事翻译工作，他们主要是一些基督徒、犹太教徒和皈依了伊斯兰教的佛教徒等.

公元766年，哈里发曼苏尔统治时期(754—775)，印度天文学著作《悉檀多》(*Sindhind*)传入阿拉伯，并于775年左右被译成阿拉伯文.公元780年，托勒密的天文学著作《大汇编》(*Almagest*)被从希腊文译成阿拉伯文.之后，在哈里发哈伦·兰希(Haroun al-Raschid，786—809在位)、马蒙(al-Mamun，813—833在位)等的大力支持下(特别是马蒙，他在巴格达修建了一座“智慧宫”，召集了许多著名学者，是继亚历山大博物馆之后世界上最重要的学术机构)，翻译家

们把大量文献都译成阿拉伯文，并对许多文献重新进行校订、考证、勘误、增补和注解，其中有欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯、梅内劳斯、海伦(Heron of Alexandria，1世纪)和丢番图等希腊著名学者的数学和天文学著作，[①]以及古希腊亚里士多德、柏拉图、伽伦和希波克拉底(Hippocrates of Chios)等的哲学著作，还有印度数学家、天文学家婆罗摩笈多(Brahmagupta，c. 598—c. 660)的著作等等. 在众多的翻译家之中，特别值得提及的是9世纪后半叶的泰比特·伊本·库拉，他不但是希腊著作的杰出翻译家，而且也是一位相当出色的注释者. 他将欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯、托勒密和欧托修斯(Eutocius of Ascalon，c. 480—c. 540)的著作译成阿拉伯文，并为丢番图和帕普斯(Pappus)的著作进行补注. 如果没有泰比特的工作，现存的希腊著作的数量将会更少. 大量的古希腊时期的著作也正是通过它们的阿拉伯译本得以流传下来.

阿拉伯数学

伊斯兰文化在它形成之际是以阿拉伯语交流传播，用阿拉伯文字书写表述的，所以又称为阿拉伯文化. “阿拉伯科学”可以说是用阿拉伯文写成的科学著作，而“阿拉伯数学”同样可以说是用阿拉伯文写成的数学著作. 阿拉伯文属于闪米特语系，它是一种多种文化的混合语. 在同被征服民族的交往中，阿拉伯人不断地从波斯语、阿拉马语和其他外国语言中吸取大量词汇，其中包括从希腊人那里吸取的政治、科学和哲学术语等. 在阿拉伯数学中，正统的阿拉伯人的数学著作只是其中的一小部分，而大部分的著作还是希腊人、波斯人、花拉子模人、叙利亚人、摩尔人以及犹太人等完成的. 下面我们统称阿拉伯帝国统治下的人们为阿拉伯人. 阿拉伯的数学著作主要是算术、代数、几何和三角学方面的. 几何和三角学方面的著作，许多内容来源于古希腊数学；算术和代数学方面的著作则较多地受印度数学、中国数学的影响，许多著作中对于印度来源都作了十分清楚的记载，书名中出现“印度”字样的著作就明确地说明了这一点. 如花拉子米的《印度的计算术》(*Algoritmi de Numero Indorum*，现存为拉丁文本，剑桥大学图书馆收藏)、库斯耶尔(Kushyār ibn Labbān al-Jīlī)的《印度计算原

---

① J. L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, 1986, pp. 2—5. 或 D. E. Smith, *History of Mathematics*, Ginn and Company, 1923, p. 176.

理》(*Principles of Hindu Reckoning*)以及纳塞维(al-Nasawī)的《印度计算必备》(*Al-Muqni fī al-Hisāb al-Hindu*)等.从阿拉伯的许多著作,特别是算术、代数著作中,我们可以发现大量的与中国古代数学著作相似的内容,甚至不少的内容完全相同.据中国数学史家钱宝琮和英国科学史家李约瑟(J. Needham)等的论述,这些内容可能是由中国传入阿拉伯国家,通常认为是经由印度间接传入的.印度是中阿文化交流的中间媒介.①另外,很早就已经开始的中阿贸易交流和政治交往②也为两个地域的科学文化和数学交流奠定了基础.

① 杜石然:《试论宋元时期中国和伊斯兰国家间的数学交流》,载钱宝琮《宋元数学史论文集》,科学出版社,1966,第241—265页.杜石然:《再论中国和阿拉伯国家间的数学交流》,载《自然科学史研究》,3(1984),4,第299—303页.李约瑟:《中国科学技术史》(第二卷 数学),第323—328页.钱宝琮:《中国数学史》,科学出版社,1992,第214—224页.

② 李约瑟:《中国科学技术史》(第一卷 总论),第367—412,476—481页.

第二章 阿拉伯学者在几何学方面的成就

阿拉伯学者在几何学方面的成就虽不如在三角学和代数学方面突出，但他们也在几何学的某些问题上做出了重要推进. 主要表现在以下两个方面：1. 几何作图；2. 欧几里得第五公设（或者说伊斯兰世界的平行线理论）证明的尝试. 特别是后者，阿拉伯学者做出了重要贡献.

§2.1 几何作图

几何作图是古希腊几何学家有强烈兴趣的课题之一. 欧几里得的《几何原本》(*Elements*)有两部分是专门关于这一问题的讨论.《几何原本》第四部分，欧几里得给出了等边三角形、正方形、正五边形、正六边形、正八边形、正十边形以及正十五边形的作法；第八部分，给出了正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体以及正二十面体的作法. 作图的工具为圆规和直尺，即尺规作图. 这里的圆规指的是可折叠圆规，直尺指的是没有平行边、没有刻度的直尺.《几何原本》是阿拉伯学者几何作图知识的重要来源，大批的阿拉伯学者对它作过编辑和评注. 在中世纪，它曾是阿拉伯数学和天文学的学生必读的基本教材. 除《几何原本》之外，古希腊学者阿基米德的两篇论文《论球面和柱面》、《圆内接七边形》以及阿波罗尼奥斯的著作《圆锥曲线》也是阿拉伯学者进行几何作图的重要支柱.

关于阿布·萨赫尔（Abū Sahl al-Qūhī）正七边形的构造问题. 萨赫尔是10世纪后半叶巴格达街头的一个耍玻璃瓶的魔术师，后来，他放弃了玩魔术而从事科学研究. 也许是作为魔术师的经验激起了他对物体重心研究的兴趣，他取得了自阿基米德时代以后关于重心研究的最深刻的理论成果. 萨赫尔非常熟悉阿基米德的工作，他对《论球面和柱面》的第二部分作了评注. 在评注中，他给出了如何利用圆锥曲线构造一个球体，而这个球体和另外一个球体的一部分表面积相同的方法. 萨赫尔还设计了画圆锥曲线的一种仪器——完全规（complete compass）. 凭借在圆锥曲线上的兴趣和经验，萨赫尔考虑了正七边形的构造问题. 他找到了一种依赖于圆锥曲线的解决方法. 他的灵感来源于阿基米德正七边形存在性的证明. 然而，构造正七边形作为一个问题，却是萨赫尔之前的几何

学家一直没有解决的.

萨赫尔构造正七边形采用的是传统的分析法，也就是说，他首先假设正七边形已经构造出来，然后用一系列能够反推的结论推证构造正七边形的条件. 利用这种方法，他得到了等价于作正七边形的作图法. 我们可以将他的整个过程分为以下三个步骤：

第一步，从正七边形到三角形. 如图 2-1，设圆中弦 BG 是其内接正七边形的一边，且 $AB=2BG$，则弧 $\widehat{ABG}=3\ \widehat{BG}$. 因为 $\widehat{BG}$ 为整个圆周的 $\frac{1}{7}$，所以弧 $\widehat{ADG}=4\ \widehat{BG}$. 由《几何原本》Ⅵ. 33 知 $\triangle ABG$ 的角和它们相对应的圆弧有相同的比例关系，因此 $\angle B=4\angle A$，$\angle G=2\angle A$. 这样，构造正七边形的问题就转化为构造角的比例是 4∶2∶1 的三角形问题.

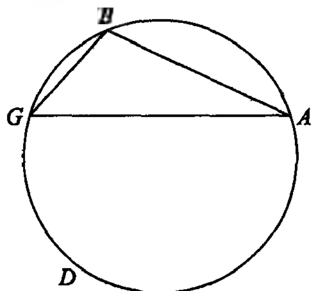


图 2-1

第二步（化简），从三角形到线段的分割. 如图 2-2，我们假设 $\triangle ABG$ 满足：$\angle B=2\angle G=4\angle A$. 将线段 BG 向两边延长，使得 $AG=GD$，$AB=BE$，连结 AE，AD，则有 $\angle BAG=\angle D$，$\angle BGA=\angle EAB$，于是 $\triangle ABG\backsim\triangle DBA$，$\triangle AEG\backsim\triangle BEA$，因此 $BA^2=BG\cdot BD$，$EA^2=EB\cdot GE$. 由于 $AB=BE$，$AE=GD$，所以，上述两个等式分别变为 $BE^2=BG\cdot BD$，$GD^2=EB\cdot GE$. 由此可知，正七边形的构造问题也就转化为利用 B，G 两点分割线段 ED，使得上述两个等式成立.

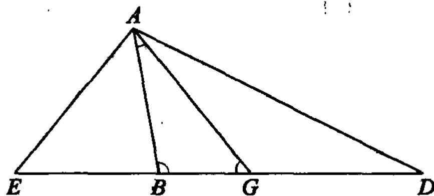


图 2-2

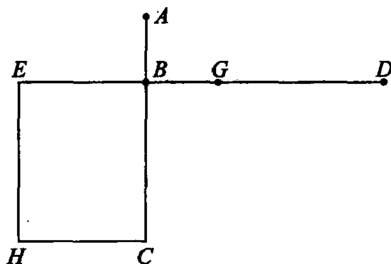


图 2-3

第三步,从线段分割到圆锥曲线.如图2-3,假设ED是被B,G分割且满足第二步中两个等式的线段,过B点作AC垂直于ED,使得$AB=BG,BC=GD$.以EB,BC为边作矩形$BCHE$,则$AC\cdot AB=BD\cdot BG=BE^2$.因为$AB=BG$,$BE=HC$,所以$AC\cdot BG=HC^2$.也就是说点$H$在一条以$B$为顶点、参变量都等于$BG$的双曲线上.

这样,我们就导出了两条曲线:一条抛物线和一条双曲线.将上述三个步骤反推,对于给定的正七边形的边长BG,通过构造两条圆锥曲线就可以得到满足第二步条件的线段$EBGD$,进一步可以构造$\triangle ABG$,从而最终作出以BG为边长的正七边形.对于萨赫尔来说,利用直尺和圆规构造满足一定条件的圆锥曲线是一件轻而易举的事情.因此,萨赫尔完整地解决了正七边形的尺规作图问题.

另外,萨赫尔还利用圆锥曲线解决了三等分角的问题,并借助于三等分角给出给定边长的正九边形的作图方法.利用圆锥曲线三等分角是古希腊学者熟悉的方法,亚历山大的帕普斯就曾给出三种.因此,萨赫尔这方面的工作实际上沿承了古希腊的成就.与萨赫尔同时代的阿拉伯学者易卜拉欣·伊本·西那(Ibrāhīm ibn Sinān, 909—946)在其著作《关于几何作图问题的分析和综合方法》(*On the Method of Analysis and Synthesis in Geometrical Problems*)中也给出了圆锥曲线的作图法,但也深受古希腊的影响,并没有取得实质性进展.

在几何作图问题上,另一位值得介绍的学者就是阿布·瓦法.他出生于布山(今伊朗霍拉散的一个小城).公元959年,他来到东阿拉伯首都巴格达,成为巴格达数理天文学派的代表人物.阿布·瓦法继承了阿拉伯数理天文学的传统,完成了多部具有独创性的科学著作.同时,他还为欧几里得、丢番图以及花拉子米的著作作过注释.

阿布·瓦法的数学成就主要在三角学方面:他造出比较精确的三角函数表;提出并证明了正弦函数的和差化积公式;证明球面三角形正弦定理,并用来解释斜三角形等.在其于990年完成的一部实用数学著作《手艺人几何作图法》(*Kitāb fī mā yahtajilayh al-sāni'min al-a'māl al-handasiyya*)中给出了大量作图题目.他的作图题目涉及的范围极其广泛,由基本的平面作图直到求作内接于一个球的正多面体,且大多数属于尺规作图.在这些尺规作图题中,最具有代表性也十分重要的就是其"生锈圆规"(即固定开度的圆规)作图问题.实际上,这一问题起源于古希腊和印度.但阿布·瓦法利用"生锈圆规"解出作图问

题的数量之大，却是绝无仅有的. 阿布·瓦法在这方面的一个典型的例子就是：用一个开度等于给定圆半径的"生锈圆规"，作这个给定圆的内接正五边形. 他的具体作图过程如下：

在半径 DA 的端点 A 引 AE 垂直于 AD，如图 2-4. 取 $AE=AD$，平分 AD，分点记为 B. 连结 BE，在 BE 上取 $BC=AD$，平分 BC，分点为 T. 作 TI 垂直于 EB，设 TI 交 DA 的延长线于 I. 设以 I 为圆心，以 AD 为半径的圆交给定的圆于点 M 和 L，则弧 $\widehat{ML}$ 是给定圆周的 $\frac{1}{5}$，且弦 ML 的平分线平分劣弧 $\widehat{ML}$，交圆周于另一点 O. 作弦 MO 和 LO 的平分线，分别交弧 $\widehat{MO}$ 和 $\widehat{LO}$ 于点 N 和 P. 这样圆周就被分成 5 条相等的弧，它们的弦就是正五边形的边. 阿布·瓦法证明了他的作法的正确性.

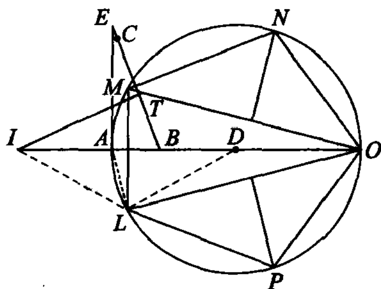


图 2-4

这种作图问题在欧洲文艺复兴之后又得到深入广泛的研究，其一般理论和相应的作图方法也得到进一步的完善和发展.

§2.2 欧几里得第五公设证明的尝试

欧几里得在其著作《几何原本》中给出了五个公设，其中第五个公设为：若一条直线与两条直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线延长后必相交于该侧的一点. 该公设被称为第五平行公设. 因为这一公设不像其余公设那样显而易见，也就是说，不像其余公设那样容易被人接受，所以它的提出遭到许多希腊人的反对，他们试图利用其他公理和公设来证明这一公设. 然而，各种尝试最终都归于失败. 自从欧几里得的《几何原本》的阿拉伯文译本出现以后，中世纪伊斯兰的数学家们就为证明第五公设做着不懈的努力，他们的工作一直影响着 18 世纪以前欧洲平行线理论的发展.

最早证明平行公设的是天文学家、数学家焦赫里(al-Jawharī, c. 830)，其数学成就主要在几何方面. 他深入地研究过《几何原本》，撰有《欧几里得几何原本评注》(*Kitāb Tafsir Kitāb Uqlīdis*)和《欧几里得几何原本的附加命题》(*Kitāb al-Ashkāl allatī zādahā fi'lmaqāla'l-ūlā min Uqlīdis*，共附加 50 个命题)，但

均已失传. 13 世纪，纳西尔丁在其著作《令人满意的论著》(*al-Rīsālal-shāfiya*)中摘引了焦赫里著作中的部分内容. 由这些记载我们可以知道，焦赫里为证明第五公设给出了五个命题. 第一个命题是：两条不相交的直线是等距的；第二个为：三角形两条边中点的连线等于第三边的一半；第五个命题则为：通过给定角内的任何一点可以作一条直线与角的两边相交. 在证明第一个命题时，焦赫里使用了下面的假设：如果两条直线与第三条直线相交，形成的内错角相等，那么这两条直线与其他任何一条直线相交，形成的内错角也相等. 焦赫里的第一个命题与第五公设是相互独立的，因此，他必须证明结论：平行线是等距的. 但他却将该结论作为一个公理使用，从而出现了循环推证的矛盾. 焦赫里的第五个命题(根据 13 世纪的学者卡萨尔(al-Din Qaysar)的记载，最初是由辛普利休斯(Simplicius，6 世纪上半叶)提出的)实际上是和第五公设等价的，后来被许多学者作为假设前提出现在第五公设的证明中. 如法国数学家勒让德(A. M. Legendre，1752—1833)在其翻译的《几何原本》第 3 版的附录中，即是在该前提下证明第五公设. 该命题在平行理论的发展中起了重要作用.

泰比特·伊本·库拉年轻时是美索不达米亚(Mesopotamia)的哈兰(Harran)城的一名货币兑换商，后来到巴格达从事学术研究. 他是一位杰出的翻译家，把大量的希腊文和叙利亚文著作译成阿拉伯文. 阿基米德和阿波罗尼奥斯的部分著作就是通过他的译本而保存下来的. 他也翻译了欧几里得的《几何原本》.

泰比特对于第五公设的证明做了两种不同的尝试，分别体现在他的文章《欧几里得著名公设的证明》(Maqāla fī burhānal-masādara l-mashūra min Uqlīdis)和《论两条直线相交，它们与第三条直线相交且在同一侧构成的两角之和小于两直角》(Maqāla fī anna l-khattayn idhā ukhrijā'alā zawiyatayn aqal min qā' imatayn iltaqayā)之中.

在第一篇文章里，泰比特的证明基于下面的假设：两条直线与第三直线相交，如果它们在(第三条直线的)某一侧靠近或相离，那么它们在另一侧就相离或靠近. 他证明了五个命题，其中第一个命题为：如果两条直线与第三条直线相交，构成的内错角相等，那么它们无论在哪一侧都既不能靠近也不能相离. 这里，泰比特没有使用“平行”这一术语，而是用“既不能靠近也不能相离”来代替. 第三个命题建立了平行四边形的存在性，即：如果连结既不靠近也不相离的两条等长线段的端点，那么得到两条既不靠近也不相离的直线. 由此在其第四个命题中推出焦赫

里的第二个命题.利用这些命题和阿基米德公理,泰比特完成了第五公设的证明.

在第二篇文章中,泰比特的证明和第一篇里的截然不同.也许是基于他对阿基米德著作的深入研究和他的力学知识,他把运动的概念引入几何学.泰比特假设平行移动(一种"简单运动")保持直线运动,也就是说,当几何图形沿直线运动时,其上所有的点都沿相同方向保持直线运动.由此泰比特得出"存在等距直线"的论断,并证明了命题:两个底角和两个腰都相等的平面四边形,它的另外两个角也相等.该命题的一个特例,当两个底角均为$\frac{\pi}{2}$时,即为矩形的存在性命题.利用这个结果和阿基米德公理,泰比特证明了平行公理.他的这种方法在平行线理论的发展中产生了很大影响.

与泰比特同时代的奈里济(al-Nayrizī,c. 897—c. 922)也是伊斯兰世界的早期研究第五公设的学者之一.他主要从事几何学和天文学的研究.在对《几何原本》的注释中,他大量引用了希腊数学家海伦和辛普利休斯的著作,并介绍了阿加尼斯(Aganis,6 世纪上半叶)的工作,这也是他的注释具有重要价值的主要原因之一.奈里济也对第五公设作了证明,但涉及的一些命题和证明的过程都与阿加尼斯的极其相似,这也是受其工作影响的缘故.10 世纪中后期的伊斯兰学者卡斯(al-Bitriq al-Qass,c. 950)和伊本·西纳对欧几里得第五公设也作了一定的贡献,但他们的工作并没有对后世学者起到太大的影响.

与伊本·西纳同时代的伊本·海塞姆(Ibn al-Haytham,965—c. 1040)在平行线理论方面作出了重要贡献,他的工作直接影响到后世数学家.海塞姆在几何学方面有好几本论著,其中《欧几里得几何原本未证明问题的评注》(*Kītāb S̄arh musādarāt Uqlīdis fī-l-Usūl*)和《欧几里得几何原本释疑》(*Kītāb fī Hall S̄ūkuk kītāb Uqlīdis fī-l-usūl wa-sarh ma'ānīhī*)两部著作,对《几何原本》进行了系统的研究.海塞姆首先对《几何原本》中平行线的定义提出质疑,他认为定义中无限延长的概念是不可理解的.受泰比特的影响,海塞姆从运动的观点出发重新定义了平行线的概念:垂直于已知直线的线段,其一个端点在已知直线上,当此直线保持和已知直线垂直并沿已知直线移动时,它的另一个端点描绘出一条与已知直线等距的直线,这条直线称为已知直线的平行线.由此定义出发,他证明了第五公设.在第五公设的推证过程中,海塞姆给出了下列命题:设四边形 $ABCD$ 的角$\angle A$,$\angle B$,$\angle D$ 均为直角,则$\angle C$ 也是直角,如图 2-5.他证明 $AB>CD$ 和 $AB<CD$ 两种情况都将导致和假设"两条直线不能围成一块面积"相矛盾的结果,从而确定$\angle C$ 也是直角,即证明了矩形的存在性.海塞

姆的四边形称为"三直角四边形"，这种四边形后被 18 世纪德国数学家兰伯特（J. H. Lambert，1728—1777）重新做了深入研究，并得出一系列重要命题，这些命题后来成为非欧几何学的基础. 另外，海塞姆还陈述了这样一个命题：不过三角形顶点并与它的一边相交的直线一定与另一边相交. 这正是德国数学家帕施（M. Pasch，1843—1930）的著作

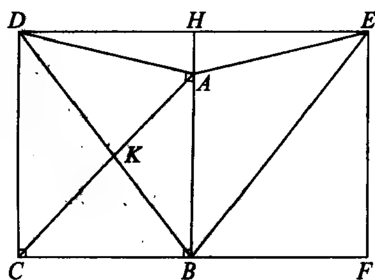


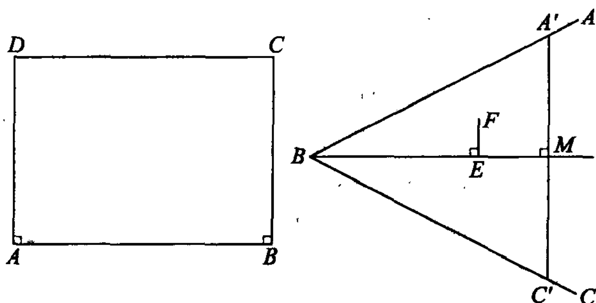
图 2-5

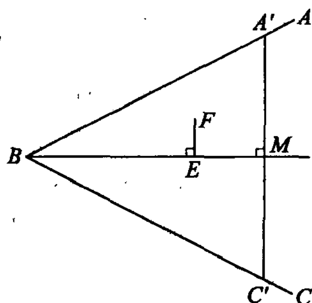
《新几何学讲义》中的"顺序公理"（也称帕施定理）. 海塞姆的工作清楚地揭示了平行公设和四边形内角之间的关系，他所给出的若干命题在平行线理论的发展过程中具有重要意义.

继海塞姆之后又一位对平行线理论作出突出贡献的阿拉伯数学家就是奥马·海亚姆. 海亚姆出生于霍腊散（Khorāsān）的内沙布尔（Nīshāpūr），由于时局的动荡，他先后到撒马尔罕（Samarkand）和伊斯法罕（Isfahan）工作. 海亚姆在数学、天文学、哲学、诗歌等各个方面都有卓越的贡献，他是一位博学的科学家和著名的诗人. 在几何学方面，他撰有《欧几里得公设中的难点注释》（*Sharh ma ashkala min Musādārt Kītāb Uqlīdis*）一书. 这本书讨论了两个难题：一是平行公设；二是比的问题. 在平行公设的讨论中，海亚姆反对海塞姆将运动观点引入几何学. 他给出了下列假设：两条越来越近的直线必在这个方向上相交，不存在彼此接近的直线在这个方向上相离. 在这个假设下他证明了下面的结论：四边形 $ABCD$ 的 $\angle A$ 和 $\angle B$ 都是直角，且 $AD=BC$，则 $\angle C$ 和 $\angle D$ 也均为直角，如图 2-6. 海亚姆首先证明 $\angle C$ 等于 $\angle D$，然后将 $\angle C$，$\angle D$ 的大小分为三种可能：(1) 为直角；(2) 为锐角；(3) 为钝角. 他用反证法推证后两种情况都将导致矛盾，因此 $\angle C$ 和 $\angle D$ 只能为直角，由此证明了平行公设. 意大利数学家萨凯里（G. Saccheri，1667—1733）把他的平行线理论建立在这种四边形的基础上，成功地得到一系列非欧几何的定理. 现在这种四边形也称为海亚姆－萨凯里四边形.

继海亚姆之后，阿拉伯学者哈那菲（al-Hanafī，1178/1179[1168/1169]—1251）、马赫里比（al-Maghribī，fl. c. 1260—1265）、阿哈里（Umar al-Abharī，d. c. 1265）、撒马尔罕迪（al-Samarqandī，fl. 1276）等都对第五公设的证明做了一定的工作. 如阿哈里证明了命题：过角内一点垂直于该角的角平分线的直线必和角的两边相交，如图 2-7；撒马尔罕迪证明了命题：可以作和给定角 $\angle ABC$ 的角平分线 BD 相交的任意条线段，使得在每一条线段上都建立起等腰三角

形，三角形的顶点在 BD 上，且 BD 平分顶角，如图 2-8. 这些学者们的工作并没有引起后世数学家们的重视.





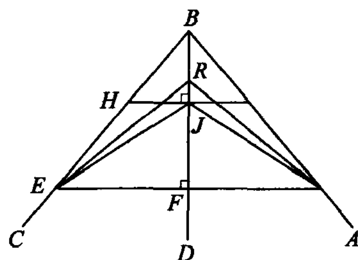


图 2-6　　图 2-7　　图 2-8

中世纪伊斯兰世界最后一位对平行线理论作出卓越成就的学者就是纳西尔丁·图西. 图西 1201 年出生于波斯的图斯(Tūs)，他的名字源于他的出生地，他也常被称为纳西尔丁. 纳西尔丁早年跟随父亲学习宗教，又跟随舅舅学习逻辑学、哲学和玄学，同时接受了代数学和几何学的教育. 后来到内沙布尔深造，接受正规教育. 纳西尔丁生活的时代正值阿拉伯帝国衰败、蒙古军大举西进. 为了寻求安静的学者生活，纳西尔丁辗转多地，并写下了一批数学、哲学、伦理学和逻辑学方面的著作. 1256 年，蒙古远征首领旭烈兀征服波斯北方，占领了阿拉穆特等要塞. 因其重视天文学，将纳西尔丁收入朝中，担任科学顾问，并俸以厚禄. 旭烈兀建立伊儿汗国后，纳西尔丁于 1259 年在迈拉盖(Marāgha)开始建造天文台. 在他的经营下，迈拉盖很快成为当时的重要学术中心. 1274 年，纳西尔丁在巴格达患病并逝世于巴格达附近的卡济迈因(Kadhimain).

已知的纳西尔丁的论著和书信多达 150 种，主要用阿拉伯文和波斯文写成. 他的论著涉及当时伊斯兰世界的所有学科，其中数学、天文学、逻辑学、哲学、伦理学和神学影响较大. 这些论著不仅在伊斯兰世界被奉为经典，即使在欧洲乃至整个世界文化中也占有一席之地. 纳西尔丁共有三部著作论述平行线理论，一部是写于 1251 年之前的《平行线问题释疑》(*Ar-risāla aš-safiya an aš-sakk fi-l-hutūt al-mutawāziya*)；另两部是对《几何原本》的修订和注释. 他的许多前辈的工作通过他的著作得以保存下来.

在《平行线问题释疑》一书中，纳西尔丁一开始就批判地评价了焦赫里、海塞姆和海亚姆的工作，其中对海亚姆工作的批评尤为详细，突出体现在下列方面：(1) 海亚姆使用的(角)连续性原则不是几何学的特征；(2) 错误地使用阿基

米德原理;(3) 两条平行线间的距离概念是含混不清的.他试图利用欧几里得的其他公理和公设证明第五公设.在对《几何原本》的一个评注中,纳西尔丁明确地给出了下列假设:同一平面上的若干条直线,如果在一个方向上是分离的,那么它们在这个方向上就不会靠近.在此基础上,他证明了一系列命题.如:直线外一点到直线的垂直距离最短;海亚姆－萨凯里四边形的两个顶角都是直角;自角内任一点必能作一条直线和角的两边都相交等.从而进一步证明了第五公设.然而,纳西尔丁发现上述论证过程存在失误之处,于是舍弃上述假设,他给出了两个不加证明的预备定理,并由此证明第五公设.这两个定理分别为:(1) 如图 2-9,AB,CD 为两条直线,由 AB 上各点 E,F,G 作 CD 的垂线,若这些垂线在从 D 到 C 的方向上逐渐缩短,则两直线在这个方向上逐渐靠近,而在相反方向上则逐渐分离.进一步地,垂线和 AB 形成的角,在逐渐靠近的一边为锐角,在逐渐分离的一边为钝角.(2)是(1)的逆命题,即以垂线和构成的角为条件,以直线的靠近和分离为结论.

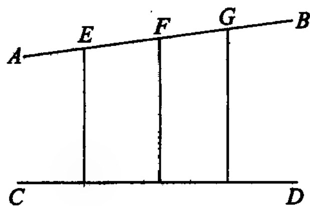


图 2-9

纳西尔丁的著作后被英国数学家沃利斯(J. Wallis,1616—1703)重新发表,以使欧洲学者得以了解纳西尔丁的工作.沃利斯称纳西尔丁对第五公设的证明是“现有论证中最机智的论证”.纳西尔丁的工作是中世纪时期非欧几何最重要的先驱性工作之一.然而,纳西尔丁和其他学者一样,并没有最终证明第五公设,他的证明同样是有缺陷的.几乎所有对第五公设的证明做过尝试的学者,都毫无例外地重复着同一个错误,即他们都是在一个与第五公设等价的假设下来证明第五公设.

欧几里得平行公设是阿拉伯学者研究几何学的主要内容,他们的工作在平行线理论的发展和非欧几何前史中占有重要位置.当然,他们的工作还没有产生建立异于欧几里得几何体系的可能性,但在对第五公设的尝试过程中,他们得到了许多重要的发现,这些发现相当一部分被后世数学家所借鉴,为他们的研究工作开辟了道路.

第三章 阿拉伯学者在三角学方面的成就

三角学的发展是“供给”与“需求”持续的相互作用的结果，这也许是数学的其他任何分支所无法比拟的. 这里的供给是指任何时代的可用的数学理论和有效的技术，需求则是指单纯的应用科学——天文学. 它们之间的关系是如此的紧密，以至于直到 13 世纪才被分为两个各自独立的学科. 在古希腊天文学家设计太阳、月亮和五大已知行星的运动模型之前，没有任何三角学的迹象. 由于设计星体运动模型需要从给定三角形的其他已知条件计算三角形的确定的边和角的值，附属于天文学的三角学也就应运而生. 这至少可以追溯到公元前 3 世纪的阿波罗尼奥斯时代. 古印度天文学家使用了古希腊的天体运动模型，因此他们也面临着同样的数学问题. 希腊和印度学者的天文学手册以及它们的评注形成了三角学早期历史的大部分内容. 到了中世纪阿拉伯时代，由于数理天文学的需要，三角学的发展进入了新的时期. 这一时期对三角学的发展作出突出贡献的主要是阿拉伯学者，他们不但翻译了印度的《苏利耶历数全书》(*Sūrya Siddhānta*)以及希腊学者托勒密和梅内劳斯等的天文学著作，其最终被传入欧洲，促进了欧洲天文学和三角学的发展，而且他们也推进了希腊和印度的三角术，并使得三角学开始脱离天文学成为相对独立的学科. 阿拉伯学者在三角学方面的学术主要来源于托勒密的《大汇编》、梅内劳斯的《球面论》(*Sphaerica*)等古典天文学著作，以及印度的《苏利耶历数全书》等天文历表.

§3.1 阿拉伯学者的平面三角学

3.1.1 六个三角函数的引入

正弦函数和余弦函数

在希腊，正弦函数是用弦的长度来表示的. 托勒密的著作《大汇编》给出的正弦函数相当于 $\sin_R \widehat{AB}=\frac{1}{2}\mathrm{crd}_R 2\,\widehat{AB}$. 印度人改进了这种表示方法，他们把半

弦与全弦所对弧的一半相对应，给出了具有现代意义的正弦函数概念. 此概念在中世纪成为通用概念. 如果用 $\sin_R \widehat{AB}$ 记为半径为 R 的圆中弧$\widehat{AB}$的正弦，则印度人的正弦函数和现代的正弦函数之间的关系为：$\sin_R \widehat{AB}=R\cdot\sin\widehat{AB}$. 对于余弦函数，人们没有进行单独研究，只是将它作为“弧的余角的正弦”来看待. 也就是说，半径为 R 的圆中小于 90°的弧$\widehat{AB}$的余弦 $\cos_R \widehat{AB}=\sin_R(90°-\widehat{AB})$.

正切和余切

据巴塔尼的代表作《天文论著》(*Kitāb al-Zij*，又名《星的科学》)记载，为了研究日晷，他使用了这两个函数. 巴塔尼的主要贡献在天文学，《天文论著》是他的成名之作，由于天文计算的需要而发展的三角学理论集中体现在他的这部著作之中. 巴塔尼是对希腊三角学加以系统化的第一位阿拉伯学者，他也是中世纪对欧洲影响最大的天文学家之一，其《天文论著》被译成拉丁文后在欧洲广为流传，哥白尼(N. Copernicus)、波伊巴赫(G. Peurbach)、第谷(Tycho Brahe)、开普勒(J. Kepler)、伽利略(G. Galilei)都利用或参考了他的成果. 他称余切和正切分别为“直阴影”和“反阴影”，并制作了一个间隔为 1°的正切函数表. 13 世纪，纳西尔丁在其著作《论完全四边形》中利用线段的长度重新明确定义了这两个函数. 如图 3-1，AG 和 BD 均垂直于 OB，EK 垂直于 EO. 根据纳西尔丁的定义有

$$\tan_R \widehat{AB}=DB,\ \cot_R \widehat{AB}=EK.$$

纳西尔丁还给出了三角函数间的下列关系：

$$\frac{\tan\widehat{AB}}{R}=\frac{\sin\widehat{AB}}{\cos\widehat{AB}};\ \frac{\tan\widehat{AB}}{R}=\frac{R}{\cot\widehat{AB}}.$$

当 $R=1$ 时，两个关系式就是我们现在的三角函数关系式.

正割和余割

阿布·瓦法在其天文学著作《天文学大全》(*Zīj Almajistī*)中引入了正割和余割，称它们分别为“阴影的弦”和“反阴影的弦”. 纳西尔丁在《论完全四边形》中重新定义了这两个函数，它们分别是(如图 3-1)：$\sec\widehat{AB}=OD$，$\csc\widehat{AB}=KO$. 并且由$\triangle DBO$ 和$\triangle AGO$ 相似得到$\frac{DB}{DO}=\frac{GA}{AO}$，从而也就有

$$\frac{\tan\widehat{AB}}{\sec\widehat{AB}}=\frac{\sin\widehat{AB}}{R}.$$

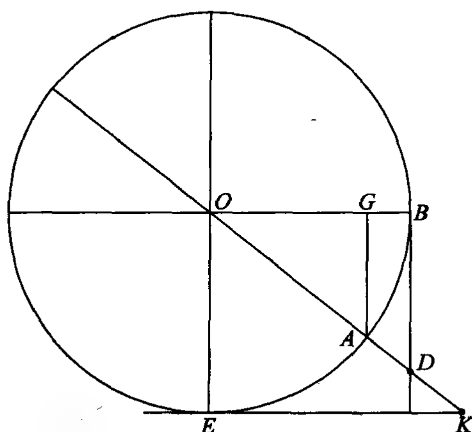


图 3-1

到 9 世纪末，也许更早一些，六个现代意义下的三角函数已全部建立起来，并且已经有人认识到参数 $R\neq1$ 所带来的不便，如阿布·瓦法和比鲁尼都曾取半径 $R=1$. 但由于当时六十进制下的计算是通用的，而这种不便又可以被取 $R=60$ 所缓解，所以并没有引起人们的关注.

3.1.2 平面三角学几个定理的证明

正弦和差化积公式的证明

正弦和差化积公式我们现在表示为

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

这个公式在托勒密的《大汇编》里是以弦的形式给出的，阿布·瓦法将它改进为弧的形式并给出了统一的证明. 在其《天文学大全》中，阿布·瓦法叙述到：当两个弧的正弦和余弦已知时，可以求出这两弦之和或差的正弦值，把每个正弦值乘以另一个弦的余弦值，则两弧的和的正弦等于这两个乘积之和，两弧的差的正弦等于两个乘积之差. 这实际上就是我们上述的正弦和差化积公式. 阿布·瓦法给出了下面的证明过程：

如图 3-2 和图 3-3，设圆周 $ABCD$ 的$\widehat{AB}$，$\widehat{BC}$的正弦是已知的. 连结 AO，BO，CO，作 BT，BH 分别垂直于 OA，OC. 连结 TH，延长 BH，BT 分别交圆周于 D，Z，则 $BH=HD$，$BT=TZ$. 因此$\triangle BHT\backsim\triangle BDZ$，所以 $DZ=2TH$. 图3-2中，由于$\widehat{ZB}=2\widehat{AB}$，$\widehat{BD}=2\widehat{BC}$，所以$\widehat{DZ}=2\widehat{AC}$；图 3-3 中，同理有$\widehat{DZ}=2\widehat{AC}$.

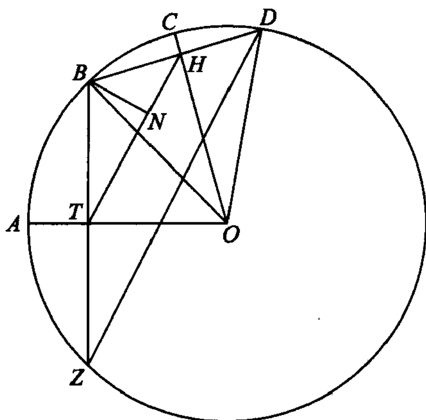


图 3-2

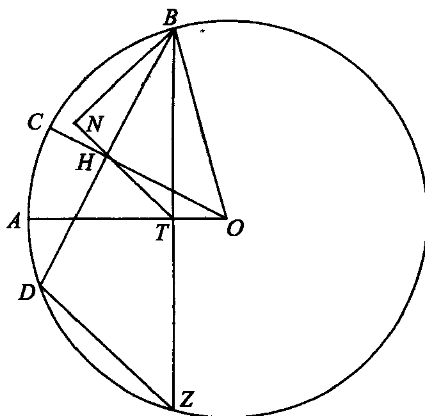


图 3-3

因此 $TH=\frac{1}{2}DZ=\frac{1}{2}\text{crd}(2\,\widehat{AC})$，故 $TH=\sin\widehat{AC}$. 作 BN 垂直于 TH. 由于$\triangle BTO$,$\triangle BHO$ 均为直角三角形，所以 B,T,H,O 四点共圆. 上述两种情况中，$\angle BHT$,$\angle BOT$ 都对应于同一条弦. 第一种情况，两个角在弦的同侧，所以它们相等；第二种情况，两个角分别在弦的两侧，所以它们互补，故 $\angle BHN=\angle BOT$. 因此两种情况都有 $\text{Rt}\triangle BHN$ 与 $\text{Rt}\triangle BOT$ 相似，这样$\frac{BH}{HN}=\frac{BO}{OT}$. 又 $BH=\sin\widehat{BC}$,$OT=\cos\widehat{AB}$,$BO=1$，也就有 $HN=\sin\widehat{BC}\cdot\cos\widehat{AB}$. 另外由$\triangle BNT$ 和$\triangle BHO$ 相似以及 $BT=\sin\widehat{AB}$,$OH=\cos\widehat{BC}$，可得 $TN=\sin\widehat{AB}\cdot\cos\widehat{BC}$. 因此，在图 3-2 的情况下我们有

$$\sin(\widehat{AB}+\widehat{BC})=\sin\widehat{AC}=TH=TN+NH=\sin\widehat{AB}\cdot\cos\widehat{BC}+\sin\widehat{BC}\cdot\cos\widehat{AB}.$$

在图 3-3 的情况下我们有

$$\sin(\widehat{AB}-\widehat{BC})=\sin\widehat{AC}=TH=TN-NH=\sin\widehat{AB}\cdot\cos\widehat{BC}-\sin\widehat{BC}\cdot\cos\widehat{AB}.$$

这样，阿布・瓦法就完整地证明了正弦和差化积公式.

正弦定理的证明

阿布・瓦法在其《天文学大全》中引入并证明了平面三角的正弦定理，其后，比鲁尼、纳西尔丁等在他们的天文学著作中都介绍了正弦定理，并给出证明. 这里我们介绍纳西尔丁的工作.

正弦定理 设△ABC是任意三角形，则$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}$.

纳西尔丁根据$\angle B$，$\angle C$的大小分两种情况：(1) 二者有一个为钝角，如图3-4($\angle ABC$为钝角)；(2) 都不是钝角，如图3-5. 两种情况给出了统一的证明.

分别延长CA，BA到D，T，使得CD，BT均为60个单位. 以B，C为圆心分别作圆弧$\widehat{TH}$，$\widehat{DE}$，作TK，DF垂直于BC，则$TK=\sin B$，$DF=\sin C$. 作AL垂直于BC. 由△ABL∽△TBK，得$\frac{AB}{AL}=\frac{TB}{TK}$；由△$ACL$∽△$DCF$，得$\frac{AL}{AC}=\frac{DF}{DC}$. 又$DC=TB=60$，上述两式左右分别相乘，得$\frac{AB}{AC}=\frac{DF}{TK}$，这也就是$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}$. 因为纳西尔丁的正弦函数仅是60乘以现代的三角函数，所以上述正弦定理对于现在的函数也是成立的，我们可以重新将这个定理写成我们现在的形式：

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}.$$

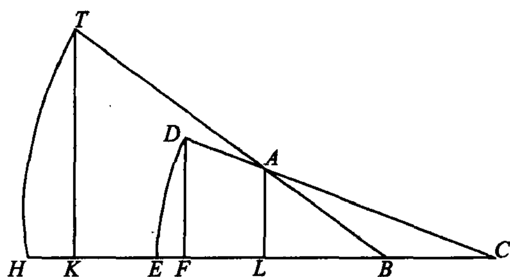


图3-4

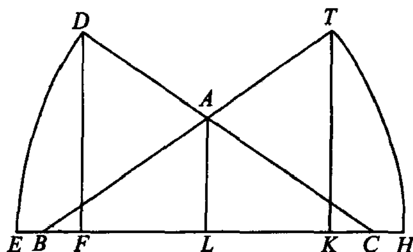


图3-5

阿拉伯学者不但给出了正弦定理的多种形式的证明，而且介绍了它的各种应用. 如纳西尔丁分三种情况讨论了所有可能的三角形的求解问题，即：(1) 已知两角和一边；(2) 已知一角和两边；(3) 已知三边. 阿布·瓦法的平面三角正弦定理提供了一种求解三角形的有效的基本工具.

除证明正弦和差化积公式以及引入并证明正弦定理之外，阿拉伯学者还给出或证明了大量的其他平面三角公式. 如伊本·雨侬斯(Ibn Yūnus，c. 950—1009)首次提出了余弦的积化和差公式$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$；巴塔尼发现了$\sec\alpha=\sqrt{1+\tan^2\alpha}$等其他三角函数间的转化公式；阿布·瓦法证明

了两角和、差,倍角和半角的正弦公式等等.阿拉伯学者的工作大大地丰富了平面三角学的内容.纳西尔丁在其脱离天文学的三角学专著《论完全四边形》中系统地论述了平面三角学,使得三角学已基本脱离天文学而开始相对独立地发展.

§3.2 阿拉伯学者的球面三角学

四量规则及正弦定理 在阿布·瓦法之前,解球面三角形的主要工具是关于完全四边形的梅内劳斯定理,这个定理应用起来比较繁琐.阿布·瓦法在其《天文学大全》中提出并证明了下面的定理:如果$\triangle ABG$,$\triangle ADE$是两个球面直角三角形,其中$\angle B$和$\angle D$均为直角,$\angle A$为公共锐角,则$\sin\widehat{BG}:\sin\widehat{GA}=\sin\widehat{DE}:\sin\widehat{EA}$,如图3-6.这个定理在阿拉伯文献中称为"四量规则".阿布·瓦法给出了下面的证明:由于AB和AG均是圆上的弧,所以包含这两个弧的两个平面必然都包含球心,且它们的交线为球的直径d.从G和E分别向包含AB的平面引垂线,H和T为垂足.在该平面内分别作GY和EK垂直于直径d,则YH和KT也垂直于直径d,这样就有$\triangle GHY\backsim\triangle ETK$,于是$HG:GY=TE:EK$.而$EK=\sin\widehat{EA}$,$GY=\sin\widehat{GA}$,$TE=\sin\widehat{ED}$,$HG=\sin\widehat{BG}$,代入上面等式即得定理结论.

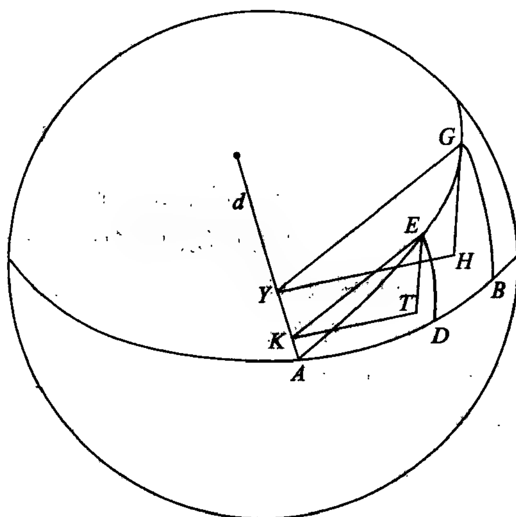


图 3-6

"四量规则"的一个非常重要的应用就是阿布·瓦法用来推证球面三角的正弦定理.阿布·瓦法是最早提出并证明球面三角正弦定理的人之一,并最先用这一定理来解球面三角形问题.

球面三角正弦定理 设$\triangle ABG$是一球面三角形,$\angle A$,$\angle B$,$\angle G$的对边分别为a,b,g,则

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin g}{\sin G}.$$

阿布·瓦法的证明可用现代数学语言表述如下:如图3-7,设$\triangle ABG$是一给定的球面三角形,$\widehat{GD}$是垂直于$\widehat{AB}$的大圆的弧,延长$\widehat{AB}$,$\widehat{AG}$得到$\widehat{AE}$,$\widehat{AZ}$,使它们均成90°弧,延长$\widehat{BA}$到$\widehat{BH}$,$\widehat{BG}$到$\widehat{BT}$,也使它们成90°弧.于是A是大圆$\widehat{EZ}$的极点,B是大圆$\widehat{TH}$的极点.因此$\angle E$,$\angle H$都是直角,$\triangle ADG$,$\triangle AEZ$均为球面直角三角形,且它们有公共的$\angle A$.由"四量规则"得

$$\frac{\sin \widehat{DG}}{\sin b}=\frac{\sin \widehat{ZE}}{\sin \widehat{ZA}},\frac{\sin \widehat{DG}}{\sin a}=\frac{\sin \widehat{TH}}{\sin \widehat{TB}}.$$

但A,B分别是$\widehat{ZE}$,$\widehat{TH}$的极点.由球面角的定义,$\angle A=\widehat{ZE}$,$\angle B=\widehat{TH}$,所以上式可写为

$$\frac{\sin \widehat{DG}}{\sin b}=\frac{\sin A}{R},\frac{\sin \widehat{DG}}{\sin a}=\frac{\sin B}{R}.$$

上式两边消去$\sin \widehat{DG}$,则得

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}.$$

同理可证后一个等式,因此定理成立.

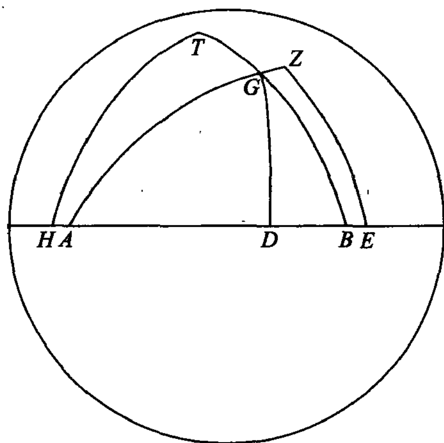


图3-7

球面三角正弦定理的发现简化了很多关于球面弧的问题,使得球面三角学呈现出一个全新的景象.

除阿布·瓦法之外,许多阿拉伯学者都为球面三角学的发展做了工作.如巴塔尼首次给出了球面三角的余弦定理:$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$;比鲁尼给出一种测量地球半径的方法;海拜什(Habash al-Hāsib,d. c. 870)、阿布·纳斯尔(Abū Nasr Mansūr ibn Ali ibn Irāq,10世纪后半叶)等都对球面三角学作出了贡献.这里我们要特别介绍的就是纳西尔丁,他在三角学专著《论完全四边形》中系统地论述了球面三角学.书

中再次陈述了球面三角正弦定理；对球面三角进行分类，引入除弧的正弦以外的其他五种球面三角函数概念；第一次完整地给出球面直角三角形（$\angle C$ 为直角）中的六种边角关系（托勒密的《大汇编》里给出四种）：

$$\cos c=\cos a\cos b,\quad \cos c=\cot A\cot B,\sin b=\sin c\sin B,$$

$$\cos A=\cos a\sin B,\quad \cos A=\tan b\cot c,\sin b=\tan a\cot B,$$

并指出在球面三角形中，由三边可以求三角，反之，由三角也可以求三边，这是球面三角和平面三角差异的重要标志；讨论了解球面三角形的方法，借助于球面极三角形求解一般球面三角形等.《论完全四边形》是流传至今的最早的三角学专著，在此之前，三角学是附属于天文学的一种计算工具. 纳西尔丁的工作使三角学开始脱离天文学，成为纯粹数学的一个独立分支. 可惜欧洲人直到 15 世纪才知道纳西尔丁的著作，但它仍然对那时的欧洲三角学的发展起了重要的作用.

§3.3 三角函数值的计算

由于天文计算的需要，阿拉伯天文学家都致力于高精度三角函数表的编制. 阿拉伯天文学家计算三角函数值大都采用下面几种方法之一：(1) 沿用希腊或印度的计算法；(2) 采用线性或二次插值法；(3) 借助于三角函数公式及迭代法.

函数表的制作可以追溯到古希腊的希帕霍斯（Hipparchus，公元前 2 世纪），他当时制作的一张弦表被称为是正弦表的前身. 后来托勒密在此基础上制作了 0°—90°每隔半度的弦表. 希腊天文学传入印度后，印度人改进为计算半弦，并制作了正弦函数表. 阿布・瓦法之前的阿拉伯天文学家编制的三角函数表，大都沿用希腊或印度的方法计算三角函数值. 如海拜什在印度人的基础上制作了一个间隔为 15′的正弦表以及间隔为 1°的正切表；巴塔尼编制了间隔为 1°的余切表；阿布・瓦法改进了海拜什的工作，制定出每隔 15′的正弦、正切和余切表等等.

插值法计算三角函数值. 利用线性或二次插值法计算三角函数值是阿拉伯天文学家编制三角函数表的一种重要工具. 在中国古代天文计算中，它是最常用的方法之一. 印度天文学家婆罗摩笈多在天文学著作《婆罗摩修正体系》(*Brāhmasphutasiddhānta*)中也描述了插值系统. 线性插值是阿拉伯学者计算

三角函数近似值的一种常用方法，比鲁尼、哈岑、雨依斯、卡西都曾给出线性插值系统.为了提高三角函数值的精确度，阿拉伯学者又给出了二次插值系统.他们的二次内插法可分为自变量等间距二次内插法和自变量不等间距二次内插法两种，详见后面“阿拉伯插值法的比较研究”一章.阿拉伯学者利用插值法编制了大量的三角函数表.如比鲁尼在《论弦》(*Chords*)中制定了间隔为15′的四位正弦表和间隔为1°的四位正切表；雨依斯制作了间隔为1′的四位正弦表；卡西在《修正的伊儿汗历》(*Khāīqānī Zīj*)中编制了间隔为1′的四位正弦和正切表等等.

迭代法计算 $\sin 1°$ 的值.卡西在《论弦与正弦》一书中给出了 $\sin 1°$ 的精确值.在他之前，阿布·瓦法、雨依斯都曾研究过这一问题，但结果不够精确.卡西利用迭代法精确地计算出了 $\sin 1°$ 的值.用现代的术语描述卡西的方法如下：

先求出 $\sin 72°$，$\sin 60°$ 足够精确的值，再由 $\sin 12°=\sin(72°-60°)$ 及半角公式算出 $\sin 3°$ 的值，由三倍角公式得出 $\sin 3°=3\sin 1°-4\sin^3 1°$，即 $\sin 1°$ 是三次方程 $\sin 3°=3x-4x^3$ 的解.由 $x=\dfrac{\sin 3°+4x^3}{3}$，从 $x_1=\sin 3°$ 开始进行迭代

$$x_n=\frac{\sin 3°+4x_{n-1}^3}{3}\ (n=2,3,\cdots),$$

最终求出 $\sin 1°$ 足够精确的值.

在实际计算过程中，卡西没有逐个求出 x_2，x_3，…，而是找到每一个修正值.他规定半径为60，并使用六十进制计数法.如果我们取半径为1并用十进制数表示，则卡西求得的的值为0.017 452 406 437 283 510，其前16位数字都是准确的.

第四章 阿拉伯开方法及方程数值解法的比较研究

开方与方程的解法是代数学中的两个基本问题，也是古代数学家们长期探讨的两个课题. 古巴比伦人已广泛借助于数表进行开平方、开立方的运算，并给出了一些数的根的很好的近似表示，但他们推算方根的具体方法却无从详考. 古希腊时期的数学家们对于开平方的计算一般是回避的，这是因为当时人们不承认无理数的合法地位，而开方可能遇到无理数. 他们通常用近似数来表示方根. 公元前 5,4 世纪已有一些求平方根的近似方法. 如设 $N=a^2+r$，则以现代符号表示相当于

$$\sqrt{N}\approx a+\frac{r}{2a}=x_1$$

或者

$$\sqrt{N}\approx\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{N}{x_1}\right)\left(x_1+\frac{N}{x_1}\right).$$

亚历山大时期，海伦还给出了下面求方根的方法：

设 x_0 为正整数，$d_1=N-x_0^3$，$d_2=(x_0+1)^3-N$，则

$$\sqrt{N}\approx x_0+\frac{d_1(x_0+1)}{d_2x_0+d_1(x_0+1)}.$$

托勒密则利用相当于 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 的关系逐次试验求平方根.

印度现存记载开方法的最早文献是阿耶波多(Āryabhata I,476—?)的著作《阿耶波多历书》(*Āryabhatīya*, c. 499)，书中给出了开平方和开立方的方法步骤. 之后，释聿陀罗(Sridhara,9 世纪)、马哈维拉(Mahāvīra,9 世纪)给出了相同的开平方、开立方的方法，婆罗摩笈多也给出了开立方的方法. 较早的记载开平方程序的是中国的《九章算术》(约成书于公元 50 年至 100 年之间)①. 书中不但给出了开平方、开立方的具体步骤，而且还给出开不尽时的命分方法——以面命之，但所给问题中未出现开不尽的情形.

后刘徽(3 世纪)在《九章算术注》中指出该公式的不精确性，认为

---

①《九章算术》的成书年代尚存争议，这里采用的是钱宝琮先生的观点.

$$a+\frac{r}{2a+1}<\sqrt{N}<a+\frac{r}{2a},$$

且开方求得整数根后可以继续开下去，主张用十进制分数来表示无理方根的近似值.

对于方程的数值解法，在阿拉伯时代之前，除中国已经产生之外，其他国家均未出现.《九章算术》中将解带有一次项的方程的方法称为“开带从方法”. 据考证[①]，祖冲之(429—500)时已将开带从方法推广到求解可正可负的数字三次方程. 在方程的数值解法上，中国所取得的成就是同时代的其他国家所望尘莫及的(特别是一般高次方程的数值解法——秦九韶“正负开方术”，相当于西方所谓的鲁非尼一霍纳算法). 随着阿拉伯时代的到来，阿拉伯学者开始从事开方和方程数值解法的研究. 本章考查了阿拉伯的开方法的发展过程和方程的数值解法以及开方和方程数值解法之间的关系，主要与同时期或之前的中国的相应成就作了比较.

§4.1 中世纪阿拉伯开方法的比较研究

阿拉伯开方法的思想来源问题是阿拉伯数学史研究工作者一直讨论的一个问题，对此众说纷纭. 早期的阿拉伯开方法，诸如尤克里迪希(al-Uqlīdīsī，10世纪)、库斯耶尔等的开方法，通常被认为来源于印度；[②]而开高次方的不同于前者的方法——相当于鲁菲尼一霍纳算法，在阿拉伯数学史研究的早期，一些数学史家提出这种方法可能源于中国贾宪(1050年左右)的“增乘开方法”. [③]但随

---

① 梅荣照:《贾宪的增乘开方法》，载《自然科学史研究》，8(1989)，1，第1—8页. 或钱宝琮:《中国数学史》，科学出版社，1992，第89，90页.

② 这里并不是确切地说来源于印度人发明的开方法，而是说从印度得到这种方法. 一种观点认为确是来源于印度的开方法；另一种则认为可能是通过印度传入阿拉伯，而真正源泉在中国，即中国的开方法经由印度间接传入阿拉伯. 数学史家 R. Rashed 和科学史家李约瑟等持后一种观点.

③ P. Luckey 等持这种观点，参见 P. Luckey，“Zur islamischen Rechenkunst und Algebra des Mittelalters”, *Forschungen und Fortschritte*, 17/18 (1948), pp. 194—204 和 “Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz islamischen Mathematik”, *Mathematische Annalen*, 120(1948), pp. 217—274.

着阿拉伯数学新的文献的不断被发现和研究，上述观点的可靠性出现了危机.[①]于是，数学史研究工作者们又指出了不同于早期观点的一些新的看法.[②]本节在已有部分原始资料和研究文献的基础上，着重考查阿拉伯开方法在不同时期的特点、过程及整个发展的脉络，试图通过与印度、中国的比较探讨其可能的思想来源.由于开平方、开立方和12世纪出现的开高次方属于两个不同的发展阶段，且它们产生的方式也不同，所以将其分别进行讨论.

4.1.1 早期背景——中国和印度的开方法

我们知道中世纪阿拉伯的开方法在产生的时间上要晚于中国和印度，而其思想源泉问题一直未有确切的答案.考查中国和印度的开方法及其过程，比较它们与阿拉伯开方法之间的异同，对于更深入了解阿拉伯开方法的实质，研究其思想发展的脉络，进而寻找其思想源泉将是有益的.为此我们首先介绍中国和印度早期的开方法.

在印度，公元5世纪出现了开平方与开立方的方法.[③]它们依靠数的除法运算，是一种随乘随减的过程，并且这种方法一直延续下来.阿耶波多在其著作《阿耶波多历书》中，在十进位值制概念的基础上给出了开平方和开立方的规则.对于开平方，他写道："总是用2倍的平方根除以非平方位置；平方位置减去

---

① 1964年，Youschkevitch在其德文版著作 *Mathematik in Mittelalter* 中指出，12世纪后期到13世纪初的数学家沙拉夫丁·图西在其代数学著作中使用了霍纳算法.1978年，R. Rashed又提出12世纪的萨马瓦尔也使用了这一算法，且萨马瓦尔的方法可能得之于凯拉吉学校.这使得P. Luckey的观点在时间上使人产生了疑问.因为凯拉吉和贾宪是同时代人，且凯拉吉的著作的成书年代(10世纪末)稍早于贾宪的《皇帝九章算法细草》(约1023—1050年).因此这种方法在阿拉伯的产生当在10世纪末至1172年(即萨马瓦尔的著作完成时间)之间.参见R. Rashed, *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmatic and Algebra*, Translated by A. F. W. Armstrong, Kluwer Academic Publisher, 1994, pp. 86—200. 或其法文版 *Entre Arithmetique et Algebre recherches sur l'histoire des mathematiques Arabes*, Les Belles Lettres, 1984.

② 1994年，Karine Chemla比较了中国和阿拉伯的开方法，提出了二者开高次方是同时、独立产生的观点.参见Karine Chemla, "Similarities Between Chinese and Arabic Mathematical Writing: (I) Root Extraction", *Arabic Sciences and Philosophy*, Vol. 4(1994), pp. 207—266.

③ 或许更早一些，A. K. Bag提出这种方法可能起源于4世纪，参见A. K. Bag, *Mathematics in Ancient and Medieval India*, Chaukhamaha Orientalia, 1979, p. 78.

商的平方，放在隔离位置的商表示根."例如，数 54 756 开平方，阿耶波多的方法如下：

```
(1) 5 4 7 5 6  (根 2…
    4
    ↓
(2) 1 4 7 5 6  (3
    1 2
    ———————
      2 7 5 6
        9
    ↓
(3) 1 8 5 6    (4
    1 8 4
    ———————
        1 6
        1 6
```

(1) 估计根的第一位数字为 2，平方放在末位 5 的下面，作减法运算.

(2) 非平方位置 14 除以 2 倍根（即 $2\cdot 2=4$），商为 3，14 减去商与 2 倍根乘积之后，再由下一个平方位置减去商的平方，即 $3^2=9$.

(3) 下一个非平方位置 185 除以 2 倍根，即 $2\cdot 23=46$，商为 4. 重复上步运算.

这里，第(2)(3)步中的"除倍根"和"减商方"即蕴含着估根方法，也说明了估根后的运算过程. 除倍根得的商要使得下面的相减过程能够顺利进行，即

$$N-(n_1\cdot 10^{n-1}+n_2\cdot 10^{n-2}+\cdots+n_i\cdot 10^{n-i})^2$$

减去

$$2n_{i+1}(n_1\cdot 10^{i-1}+n_2\cdot 10^{i-2}+\cdots+n^i)\cdot 10^{2n-2i+1}+n_{i+1}^2\cdot 10^{2n-2i}$$

不能为负. 对于开立方，阿耶波多叙述道："从立方位置减掉商的立方后，3 倍的根的平方除以第二非立方位置，用下一个（非立方位置）减去商的平方与前一根的 3 倍的乘积，并从下一立方位置减去商的立方."①显然，开立方过程是开平方的推广和发展. 这里，阿耶波多只是给出开平方与开立方的两个规则，并未详细描述其运算过程. 之后，婆罗摩笈多给出了同样的开立方规则. ②另外，其他的印度学者，如马哈维拉（Mahāvīra，活跃于 9 世纪中叶）、释聿陀罗等也都给出了相同的开平方和开立方法规则.

中国文献对于开方的记载更早. 约公元前 1 世纪，关于盖天说的著作《周髀

---

① A. K. Bag, *Mathematics*, p. 80.

② H. T. Colebrooke, *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*, 1973, p. 280.

算经》载，陈子应用勾股定理测量太阳高度时用到开平方，但没有给出开方程序.①至迟约公元1世纪成书的《九章算术》"少广章"则给出了完整的开平方和开立方的算法程序.开方术曰："置积为实，借一算步之，超一等.议所得，以一乘所借一算为法，而以除.除已，倍法为定法.其复除，折法而下.复置借算步之如初，以复议一乘之，所得副，以加定法，以除.以所得副从定法.复折除如前.若开之不尽者为不可开，当以面命之.……"给出了完整的开平方算法，同时说明了开不尽时的处理办法.开立方即是在开平方步骤的基础上增加了一行——"中行"，并配合以相应的调整变换.②明显地，《九章算术》开方术第二次估根后所用借算并非第一步中的借算右移位而得.在调整变换后，第一步中的借算已被撤消，以后每步中的借算都是重新设置的.《九章算术》开方术虽言简意赅，但仍存语焉未详之处，开方程序还不够彻底模式化、规范化.魏晋时期的《孙子算经》(约4,5世纪)、《张丘建算经》(约466—485)在计算方法上对《九章算术》开方术作了改进.从题目的开方细草看，重要的一点，它们在求得根的一位得数之后，不再撤去借算，而是保留下来称为下法，退两位、三位求减根方程.这是中算史开方术发展的一个十分重要的环节，它的确立与发展使得开方程序模式化、规范化，为11世纪贾宪"增乘开方法"的创立奠定了一定的技术基础.下以《孙子算经》卷中第19问为例说明中国的开方术，③该题相当于对数234 567进行开平方运算，其过程如下：

置积累234 567步为实，次借一算为下法，步之超一位，至百而至.

商		
实	2 3 4 5 6 7	$\Rightarrow N$
方法		
下法	1	$\Rightarrow 10^{2n}$

(1) 商置400于实之上，副置40 000于实之下，下法之上，名为方法.命上商400除实.

① 郭书春：《中国古代数学》，山东教育出版社，1991，第93页.或参见钱宝琮校点：《算经十书》(上)，中华书局，1963.

② 结合具体例子的详细描述，参见梅荣照：《贾宪的增乘开方法》，载《自然科学史研究》，8(1989)，1，pp.1—8.或钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社，1992，第49—51页.

③ 目前，对于《九章算术》开方术中的"退位"问题尚存争议.

商	4	$\Longrightarrow n_1 \cdot 10^n$
实	7 4 5 6 7	$\Longrightarrow N-n_1^2 \cdot 10^{2n}$
方法	4	$\Longrightarrow n_1 \cdot 10^{2n}$
下法	1	$\Longrightarrow 10^{2n}$

除讫,倍方法,方法一退,下法再退.

商	4	$\Longrightarrow n_1 \cdot 10^n$
实	7 4 5 6 7	$\Longrightarrow N-n_1^2 \cdot 10^{2n}$
方法	8	$\Longrightarrow 2n_1 \cdot 10^{2n-1}$
下法	1	$\Longrightarrow 10^{2(n-1)}$

(2) 复置上商 80;以次前商,副置 800 于方法之下,下法之上,名为廉法.方廉各命上商 80,以除实.

商	4 8	$\Longrightarrow n_1 \cdot 10^n+n_2 \cdot 10^{n-1}$
实	4 1 6 7	$\Longrightarrow N-(n_1 \cdot 10+n_2)^2 \cdot 10^{2(n-1)}$
方法	8	$\Longrightarrow 2n_1 \cdot 10^{2n-1}$
廉法	8	$\Longrightarrow n_2 \cdot 10^{2(n-1)}$
下法	1	$\Longrightarrow 10^{2(n-1)}$

除讫,倍廉法上从方法.方法一退,下法再退.

商	4 8	$\Longrightarrow n_1 \cdot 10^n+n_2 \cdot 10^{n-1}$
实	4 1 6 7	$\Longrightarrow N-(n_1 \cdot 10+n_2)^2 \cdot 10^{2(n-1)}$
方法	9 6	$\Longrightarrow 2n_1 \cdot 10^{2n-1}+2n_2 \cdot 10^{2(n-1)}$
廉法		
下法	1	$\Longrightarrow 10^{2(n-2)}$

以下过程与(2)类似.

依据现有文献,中国最早给出了完整的开平方、开立方的方法,且开方程序模式化、规范化.

4.1.2 阿拉伯早期的开平方和开立方

现存记载开方法的最完整的早期阿拉伯语文献是尤克里迪希的《印度算

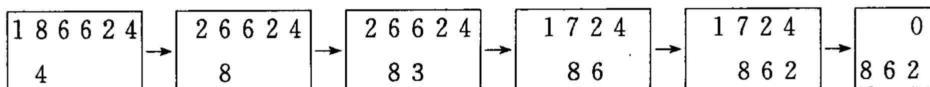
术》(Kitāb al-Fusūl Fi al-Hisāb al-Hindī).[①]这部著作大约完成于公元952—953年,书中给出了开平方和开立方的方法.第12章“数的开方”中描述了开平方的过程.对于一个给定的数,尤克里迪希首先对其分位,从右至左记下每一个奇数位,即给定数的平方根的每个数字的位置.随后他写到:“当到达有根的最后位置时,寻找一个数,使得这个数自乘之积将耗尽它上面的数或大部分……由估计发现这个数后,从其上面的数中减去该数的自乘之积,余数保留下来.”“估计数加倍后移动一个位置至没有根的位置下面.寻找一个数,并记在前一个有根的位置下面,使得这个数乘以加倍数(上一估计数的加倍数)且自乘,将耗尽它上面的数……继续下去,直到第一个位置.”[②]若设给定数为

$$N=abcdef\cdots kl(\text{假设含有 } 2i \text{ 个数字}),$$

则尤克里迪希计算的第一步就是寻找正整数 n_1,使得 $n_1^2\leqslant ab<(n_1+1)^2$,估计得到 n_1 后,将 n_1 写在数字 b 的下面.作运算 $ab-n_1^2$(设为 m_1),余数 m_1 代替 N 中 ab 的位置,将 n_1 加倍并向右移动一位至 c 的下面或 m_1c 的下面(若 $2n_1\geqslant 10$).然后作第二次估计,即寻找正整数 n_2,使得

$$n_2(10\cdot 2\cdot n_1+n_2)\leqslant m_1cd<(n_2+1)(10\cdot 2\cdot n_1+n_2+1),$$

将 n_2 记在 d 的下面.作运算 $m_1cd-10\cdot 2\cdot n_1\cdot n_2-n_2^2$(设为 m_2m_3),余数 m_2m_3 代替 m_1cd 的位置,将 n_2 加倍,并将数 $10\cdot 2\cdot n_1+2\cdot n_2$ 向右移动一位至 m_2m_3e 的下面.依次类推作下面的估计,直至在数字 l 上的估计结束为止.这样在给定数 N 的排列的下面将得到数 $10\cdot 2\cdot n_1\cdot n_2\cdots n_{i-1}+n_i$,平分加倍的数字,则 $n_1n_2\cdots n_{i-1}n_i$ 即为要求的根.以数186 624为例,尤克里迪希的开平方过程如下图所示:



所以$\sqrt{186\ 624}=432$.

另外,对不能完全开平方的数,如2 640 736 039,尤克里迪希用同样的方法求得其根,余数为40 506.这里,尤克里迪希没有给出余数的处理方法,只是求得给定数的平方根的整数部分.在该书第18章,他给出了开不尽的数的两个分数逼近公式.设 $N=a^2+r(a^2<N<(a+1)^2)$,则

---

① A. S. Saiden, *The Arithmetic of al-Uqlīdīsī*, Reidel, 1978, p. 17.

② A. S. Saiden, *The Arithmatic of al-Uqlīdīsī*, p. 76.

$$\sqrt{N}\approx a+\frac{r}{2a}(\text{当 } r^2\neq a \text{ 时}),$$

$$\sqrt{N}\approx a+\frac{r}{2a+1}(\text{当 } r^2=a \text{ 时}),$$

且 $a+\frac{r}{2a+1}<\sqrt{N}<a+\frac{r}{2a}$.

可以肯定地说，尤克里迪希逼近公式中给定数 N 的平方根的整数部分 a 以及余数 r 都是利用上面的开方法求得的. 开方过程结束后，被开方数的位置由余数代替，其下面是 $2a-n_i$（n_i 为 a 的个位数字），这种排列并未十分符合当时分数的表示方法①. 这里，只能说尤克里迪希的逼近公式可能是由上述的开方过程得到的，但也可能来源于其他的途径.

另外，尤克里迪希在《印度算术》的第 29 章“关于开立方”中给出了开立方的方法. 第一段末他写道：“直到我做出之前，没有见到探讨这一问题的任何人已经掌握了它（开立方的方法），也没有见到关于这一问题的著作.”②他首先讨论了一个数的立方问题，并给出 1—9 的 9 个数字的立方表，这个立方表在尤克里迪希立方根的数字估计中起了一定的作用. 下面我们以数 80 621 568 为例说明他的开立方过程.

寻找根的位置，这里 0，1，8 为根的位置.

(1) 估计根的第一位数字，即寻找 a，使得 $a^3\leqslant 80<(a+1)^3$，得 $a=4$，将 4 放在被开方数的 0 下面，并将 $4^2=16$ 放在两数之间，即

8 0 6 2 1 5 6 8 $\Rightarrow N$
1 6 $\Rightarrow a^2\cdot 10^{3n}$
4 $\Rightarrow a\cdot 10^{3n}$

16 乘以 4 后从 80 中减去，然后在 4 前面放一个 0，16 前面置两个 0，并分别向前移动两位和一位，即

1 6 6 2 1 5 6 8 $\Rightarrow N-a^3\cdot 10^{3n}$
1 6 0 0 $\Rightarrow a^2\cdot 10^{3n-1}$
4 0 $\Rightarrow a\cdot 10^{3n-2}$

(2) 估计根的下位数字 b 为 3，将 3 放在 4 前 0 的位置，$3^2=9$ 放在其上中

① 早期的阿拉伯课本中通常用 $\begin{smallmatrix}b\\a\end{smallmatrix}$ 表示 $\frac{a}{b}$，$\begin{smallmatrix}a\\b\\c\end{smallmatrix}$ 表示 $a+\frac{b}{c}$.

② A. S. Saiden, *The Arithmetic of al-Uqlīdīsī*, p. 315.

行 0 的位置，即

1 6 6 2 1 5 6 8 $\Rightarrow N-a^3\cdot 10^{3n}$

1 6 0 9 $\Rightarrow a^2\cdot 10^{3n-1}+b^2\cdot 10^{3(n-1)}$

4 3 $\Rightarrow a\cdot 10^{3n-2}+b\cdot 10^{3(n-1)}$

作计算 $166-3\cdot 16\cdot 3=22$，$222-3\cdot 4\cdot 9=114$ 以及 $1\,141-3\cdot 9=1\,114$，则有

1 1 1 4 5 6 8 $\Rightarrow N-a^3\cdot 10^{3n}-3a^2b\cdot 10^{3n-1}-3ab^2\cdot 10^{3n-2}-b^3\cdot 10^{3(n-1)}$

1 6 0 9 $\Rightarrow a^2\cdot 10^{3n-1}+b^2\cdot 10^{3(n-1)}$

4 3 $\Rightarrow a\cdot 10^{3n-2}+b\cdot 10^{3(n-1)}$

将中间行 1 609 换作 $43^2=1\,849$，并重复上面的加 0 及移位步骤得

1 1 1 4 5 6 8 $\Rightarrow N-(a\cdot 10^n+b\cdot 10^{n-1})^3$

1 8 4 9 0 0 $\Rightarrow (a\cdot 10+b)^2\cdot 10^{3(n-1)-1}$

4 3 0 $\Rightarrow a\cdot 10^{3(n-1)-1}+b\cdot 10^{3(n-1)-2}$

(3) 继续作根的下一位估计，得 $c=2$. 重复(2)中类似运算，得

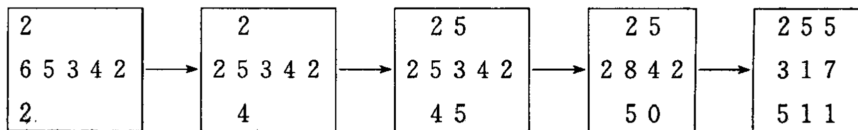
0 $\Rightarrow N-(a\cdot 10^n+b\cdot 10^{n-1}+c\cdot 10^{n-2})^3$

1 8 4 9 0 4 $\Rightarrow (a\cdot 10+b)^2\cdot 10^{3(n-1)-1}+c^2\cdot 10^{3(n-2)}$

4 3 2 $\Rightarrow a\cdot 10^{3(n-1)-1}+b\cdot 10^{3(n-1)-2}+c\cdot 10^{3(n-2)}$

显然，在作根的第三位估计时，尤克里迪希将前两位已求得的数作为一个数，继而重复前面的运算步骤求得第三位. 同样，在求第四位数字时，他将前三位看做一个数. ①

继尤克里迪希之后，阿拉伯学者库斯耶尔在其著作《印度计算规则》(*Usūl Hisāb al-Hind*)中给出了开平方和开立方的方法，他所描述的开平方计算过程几乎与尤克里迪希的完全相同，所不同的就是在计算过程的最后，库斯耶尔将得到的根的个位数字加倍，并额外加上数 1，给出了根的分数逼近表示，而尤克里迪希则没有. 如数 65 342，库斯耶尔的开平方过程如下图所示：②



---

① 根为 4 位数的开立方的具体例子参见 A. S. Saiden, *The Arithmetic of al-Uqlīdīsī*, p. 326.

② K. Chemla, *Similarities*, p. 63.

这里，库斯耶尔通过估计得到根的个位数字 5 后，分别记在 2 的上面和下面. 做完减法运算之后，将 5 加倍并加上数 1，得到数 511，而最后的图式正是分数逼近的表示形式，这是尤克里迪希的计算过程所没有的. 对比尤克里迪希和库斯耶尔的计算图式，一个明显的区别就是前者数的排列只有两行，即被开方数行和随运算而作相应变化的根的行，后者除此之外，在被开方数上面增加了根行，变为三行的排列. 后者对于计算过程的表示、描述较前者更为清晰明了. 目前，尚未有确切的证据证实二者之间的关系. 如果存在继承关系的话，那么可以说后者是前者的发展和完善.

然而，对于开立方，库斯耶尔给出与尤克里迪希明显不同的方法. 例如，数 2 986 100开立方，他首先在其下放置一行 0，即

2 9 8 6 1 0 0

0 0 0 0 0 0 0

并对被开方数实行分位. 然后估计根的第一位数为 1，分别放在被开方数中数字 2 的上面和 0 行中首位 0 的下面，最上行乘以最下行，结果放置于中间行(即 0 行). 然后，最上行乘以中间行从被开方数中减去，即有

1

1 9 8 6 1 0 0 $\Rightarrow N-a^3\cdot 10^{3n}$

1 0 0 0 0 0 0 $\Rightarrow a^2\cdot 10^{3n}$

1 $\Rightarrow a\cdot 10^{3n}$

最下行加倍乘以最上行后加到中间行，然后最上行加到最下行上，并将中间行向前移动一位，最下行移动两位，得

1

1 9 8 6 1 0 0 $\Rightarrow N-a^3\cdot 10^{3n}$

3 0 0 0 0 0 $\Rightarrow 3a^2\cdot 10^{3n-1}$

3 $\Rightarrow 3a\cdot 10^{3n-2}$

估计根的第二数字为 4，放在最下行 3 的前面，被开方数中数字 6 的上面. 然后，最下行乘 4 加入中间行，中间行乘以 4 从被开方数中减去，有

1 4

2 4 2 1 0 0 $\Rightarrow N-a^3\cdot 10^{3n}-3a^2b\cdot 10^{3n-1}-3ab^2\cdot 10^{3n-2}-b^3\cdot 10^{3(n-1)}$

4 3 6 0 0 0 $\Rightarrow 3a^2\cdot 10^{3n-1}+3ab\cdot 10^{3n-2}+b^2\cdot 10^{3(n-1)}$

3 4 $\Rightarrow 3a\cdot 10^{3n-2}+b\cdot 10^{3(n-1)}$

最下行 4 加倍后，以最下行乘最上行 4，结果加到中间行. 然后，最上行 4 加到最下行上，类似上面作相应的移位，则有

1　　4

2 4 2 1 0 0 $\Rightarrow N-(a\cdot 10^n+b\cdot 10^{n-1})^3$

5 8 8　$\Rightarrow 3(a\cdot 10+b)^2\cdot 10^{3(n-1)-1}=A$

4 2　$\Rightarrow 3a\cdot 10^{3(n-1)-1}+3b\cdot 10^{3(n-1)-2}$

估计根的第三位数字为 4，作类似于前面的运算，有

1　　4　　4

1 1 6 $\Rightarrow N-(a\cdot 10^n+b\cdot 10^{n-1}+c\cdot 10^{n-2})^3$

6 0 4 9 6 $\Rightarrow A+Bc$

4 2　$\Rightarrow 3a\cdot 10^{3(n-1)-1}+3b\cdot 10^{3(n-1)-2}+c\cdot 10^{3(n-2)}=B$

作相应变换后有

1　　4　　4

1 1 6 $\Rightarrow N-(a\cdot 10^n+b\cdot 10^{n-1}+c\cdot 10^{n-2})^3$

6 2 2 0 9 $\Rightarrow A+Bc+(B+2c\cdot 10^{3(n-2)})c+1$

4 2　$\Rightarrow B+c\cdot 10^{3(n-2)}$

这里

$A+B\cdot c+c(B+2c\cdot 10^{3(n-2)})+1=3(a\cdot 10^n+b\cdot 10^{n-1}+c\cdot 10^{n-2})^2+1.$

最后，库斯耶尔给出了开立方根的分数逼近. 若设 $N=m^3+r\quad(0<r<(m+1)^3-m^3)$，则

$$\sqrt[3]{N}\approx m+\frac{r}{3m^2+1}.$$

比较尤克里迪希和库斯耶尔的图式排列与开立方过程，二者差别在于，假设

$$N=(n_1n_2\cdots n_k)^3+r.$$

首先，前者计算图式排列为三行，后者则为四行，即在被开方数的上面增加了根行. 其次，每次估根计算后的排列中，前者中行和下行分别为

$$(n_1\cdot 10^{i-1}+n_2\cdot 10^{i-2}+\cdots+n_i)^2\cdot 10^{3(n-i+1)-1}$$

和

$$(n_1\cdot 10^{i-1}+n_2\cdot 10^{i-2}+\cdots+n_i)\cdot 10^{3(n-i+1)-2},$$

而后者则分别为其 3 倍. 且二者得到其中行排列的途径不同，即调整变换的方式不同. 前者由 $n_1\cdot 10^i+n_2\cdot 10^{i-1}+\cdots+n_i\cdot 10$ 平方后移位而得，后者则是通过随乘随加过程而得. 再次，每次估根后所做的减法运算方式不同. 虽然二者都

利用了二项式

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

但前者是将所得根的数字 n_i 平方加入中行得到

$$(n_1\cdot 10^{i-2}+n_2\cdot 10^{i-3}+\cdots+n_{i-1})^2\cdot 10^{3(n-i+2)-1}+n_i^2\cdot 10^{3(n-i+1)}$$

后利用二项式展开逐步实施减法运算，即是一种随乘随减的计算过程，而后者则是随乘随加后一次完成. 另外，后者在计算过程的结束给出了立方根的分数逼近排列，而前者则未然. 抛开二者之间的比较，单独分析库斯耶尔的开方过程. 设 $x^3=N$，开方过程的第一步估根计算即相当于作减根变换 $x=n_1\cdot 10^n+x_1\cdot 10^{n-1}$，变换方程为

$$10^{3(n-1)}x_1^3+3n_1\cdot 10^{3n-2}\cdot x_1^2+3n_1^2\cdot 10^{3n-1}\cdot x_1=N-n_1^3\cdot 10^{3n}.$$

第二步估根计算，即相当于对上述变换方程作减根变换

$$10^{n-1}\cdot x_1=n_2\cdot 10^{n-1}+x_2\cdot 10^{n-2},$$

变换方程为

$$10^{3(n-2)}x_2^3+3(n_1\cdot 10+n_2)\cdot 10^{3(n-2)+1}\cdot x_2^2+3(n_1\cdot 10+n_2)^2\cdot 10^{3(n-2)+2}\cdot x_2$$
$$=N-(n_1\cdot 10^n+n_2\cdot 10^{n-1})^3.$$

依次继续，直至开方过程结束. 可以看出，库斯耶尔的四行排列由上至下分别为：根、被开方数、一次项系数、二次项系数，这里，最高项系数没有给出. 库斯耶尔的调整变换并非简单彻底的随乘随加过程，它另外涉及到因子 2. 严格地说，他的开方过程并非现在所谓的鲁菲尼—霍纳过程. ①然而，从另一侧面分析，在库斯耶尔的整个开方过程中，仅涉及一个额外因子 2，而任何一个数的 2 倍恰好等于它自身与自身相加，且在得到根的第一位估计数字后的调整变换结果 $3n_1$，$3n_1^2$ 也并非由因子 3 和 n_1，n_1^2 相乘而来，整个过程中的调整变换均服从一种统一的计算模式. 由此看来，库斯耶尔的目的可能在于寻求一种简单的程序化的计算过程.

另外，与库斯耶尔同时代的比鲁尼也曾写过一篇较长的论文《计算中的开立方或开更高次方》(Fi Istikhrā j al-Ki'āb Wa-adlāmā War ā'ahu min marātib al-hisāb)，论述他的开方法. 之后，奥马 · 海亚姆也研究了开方问题，他写道："印度人拥有寻找平方和立方的边的方法，它是以 9 个数字的平方为基础的. ……我已经完成了一部著作以证明这些方法的正确性，并证明了由这些方法得到的

① K. Chemla, *Similarities*, pp. 239—240. 作者给出了三条理由.

结果正是要求的.我进一步增加了它们的类型,即给出了如何寻找四次幂、五次幂、六次幂直到任意次幂的边.在此之前,它们没有被做过,我给出的证明仅仅是基于欧几里得《几何原本》算术部分的算术证明."[1]他开方的基础是多项式$(a+b+\cdots+m)^n$的展开式.由于比鲁尼的论文和奥马·海亚姆的著作均已失传,我们仅能从其他资料的片段记载中得知他们曾给出开高次方的方法,但具体的开方过程却无从详考.

比较阿拉伯与早期印度的开方法,我们发现,尤克里迪希的开立方过程与印度有些相似,都是一种随乘随减的计算过程,但也存在着明显的区别.一方面,根的表示方式不同.前者在被开方数下放置了倍根行,而后者则是将所得根放在旁边隔离位置;另一方面,前者给出了调整变换过程,而后者则不然.尤克里迪希的开平方、库斯耶尔的开平方和开立方过程与印度的差别更甚:(1)根的放置方式不同,这是显然的.(2)计算过程每步的布式不同.如开立方,设$N=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^3$,N_{i+1}为作第i次估根时的被开方数,则印度开立方过程每步的布式由上至下分别为$3(x_1+\cdots+x_i)^2x_{i+1}$,$N_{i+1}-3(x_1+\cdots+x_i)^2x_{i+1}$,$3(x_1+\cdots+x_i)x_{i+1}^2$,$N_{i+1}-3(x_1+\cdots+x_i)^2x_{i+1}-3(x_1+\cdots+x_i)x_{i+1}^2$,$x_{i+1}^3$,$N_{i+1}-3(x_1+\cdots+x_i)^2x_{i+1}-3(x_1+\cdots+x_i)x_{i+1}^2-x_{i+1}^3=N_{i+2}=N-(x_1+\cdots+x_{i+1})^3$.而阿拉伯学者的开立方过程每步布式由上至下分别为根、被开方数、一次项系数、二次项系数.(3)阿拉伯学者的开方法给出了具体的调整变换过程,即随乘随加,而印度学者则没有具体描述.(4)每次估根后的减法运算方式不同.印度学者是依据$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$逐步实施各步计算,即随乘随减;阿拉伯学者则是经调整变换后一步完成.

相反,早期的阿拉伯开方法(尤克里迪希的开立方除外)与中国的开方术在计算过程上却十分相似,二者减根变换、减根方程和调整变换的本质是一致的.整个过程都是一种简单的随乘随加(每一步伴随着一次减法运算)过程.但也有一些不同之处.首先,阿拉伯开方过程较中国缺少了一行"借算行"(借算表示变换方程的最高次项系数).其次,减根变换及调整变换,前者借助于每次估计所得根,而后者除此之外还利用了借算.另外,根行中根的位置放置方式不同.前者有两种方式:一种是将每次所得根的数字放置于该次估根位置之处,并随下

[1] R. Rashed, *The Development*, p. 152.

面的调整变换作相应的移位;①另一种是将每次所得根的数字放置于当时估根位置之处,不随下面的调整作任何变动.②后者则是将所得根依其阶数放在相应位置,一步到位.尽管如此,但可以看出,早期阿拉伯的开方法较之于印度,更类似于中国早期的开方术.阿拉伯学者开平方给出的分数逼近公式,刘徽的《九章算术注》中亦有相似的叙述:"凡开积为方,方之自乘当还复其积分.令不加借算而命分,则常少,其加借算而命分,则又微多.其数不可得而定.故惟以面命之,为不失耳."③明显地,这里刘徽给出了下面的不等式

$$a+\frac{r}{2a+1}<\sqrt{N}<a+\frac{r}{2a}.$$

据早期阿拉伯学者的叙述,他们的工作是从印度的传统中得来的,而印度的传统本身似乎在更早的时候就受到中国开方术的影响.④由此可以推断,印度传统可能是中国开方术影响阿拉伯学者的一座桥梁.但从阿拉伯开方法与印度、中国开方法的比较看,阿拉伯开方法在计算过程、步骤上与印度文献记载的开方法有较大的差别,却与中国的更为相似,这是值得我们进一步考证的问题(对于中国和印度两个传统文明古国之间的关系已不属本书的讨论范围,这里我们不作介绍).由于缺乏有关中阿文化交流方面的确凿证据,我们仅从方法本身和现有资料⑤提供如下猜测:阿拉伯学者所谓的他们的开方法得之于印度,只是说他们得到这种方法的途径是印度,这种方法可能在印度被使用或由印度传入阿拉伯,由前面的分析,它可能就是中国早期的开方术.

4.1.3 阿拉伯开方法的发展——开高次方的鲁菲尼—霍纳算法

1948年,数学史家P.鲁凯提出阿拉伯数学家、天文学家卡西在其著作《算术钥》(*Key of Arithmetic*)中建立了开高次方的一般方法——鲁菲尼—霍纳算法,并认为他的思想可能源于中国贾宪的"增乘开方法".但新的资料表明,在卡西之前两个半世纪左右的萨马瓦尔也使用了这种算法,且它有可能更早地被建立.萨马瓦尔出生于一个犹太知识分子家庭,他的舅父是一个物理学家.受舅父的影响,萨马瓦尔13岁时开始学习医学和精密科学,并对数学产生了兴趣.他

① 库斯耶尔开平方过程根行的变换.

② 库斯耶尔的开立方过程中根行采用这种形式.

③ 钱宝琮校点:《算经十书》.

④ 李约瑟:《中国科学技术史》(第三卷 数学),科学出版社,1978,第303页.

⑤ 李约瑟:《中国科学技术史》(第一卷 总论;第三卷 数学)或钱宝琮:《中国数学史》.

从印度的算法、算术以及实用测量技术开始学起，后转攻代数学和几何学.由于当时的巴格达的科学研究正趋于逐渐衰退的阶段，萨马瓦尔没能找到优秀的教师指导他的学习和研究，但也因此养成独立思考的习惯.他自学了欧几里得的《几何原本》、阿布・卡米尔(Abū Kāmil)的《代数学》、凯拉吉的《综合算术》以及瓦西提(al-Wasitī)的《算术》等大量著作.18岁时，萨马瓦尔已经为他后来的数学研究工作打下了良好的基础，形成了自己的数学思想.他在数学上的贡献主要在代数学方面.萨马瓦尔在六十进制系统的基础上描述了数

$$N=0;0,0,2,33,43,3,43,36,48,8,16,52,30$$

开5次方的过程.他首先给出了下表形式的排列(表Ⅰ[①])：

第一行	0					0					0					0
第五行				2	33	43	3	43	36	48	8	16	52	30		
第四行																
第三行																
第二行																
第一行	0					0					0					0

最上第一行为根行，在每一个完全位置都放置一个0，以表示其为完全位置.其下第五行为被开方数行.最下第一行对应于最上第一行的位置也分别放置上0.

估计根的第一位数字为6，分别放置于最上行和最下行的对应位置.查看6的六十进制乘法表，用最下行乘以最上行，即6乘6，其积记入第二行.最上行乘第二行，其积记入第三行.最上行乘第三行，积记入第四行.最上行乘第四行并从第五行中减去，我们得到下表，即(表Ⅱ[②])：

第一行	0					6					0					0
第五行					24	7	3	43	36	48	8	16	52	30		
第四行					21	36										
第三行					3	36										
第二行						36										
第一行						6					0					0

① R. Rashed, *The Development*, p. 92.

② R. Rashed, *The Development*, p. 93.

然而，萨马瓦尔并未详细描述他的调整变换过程，只给出一句简洁的声明："一旦完成 14 次运算，就完成了必须记录在表中的四行的计算."随后，他提供了一张表格. 如果我们记 $n_1=6$，以现代符号表示，即为(表Ⅲ)：

	第一	第二	第三	第四	第五	
5th	n_1	n_1^2	n_1^3	n_1^4	n_1^5	n_1
4th	$2n_1$	$3n_1^2$	$4n_1^3$	$5n_1^4$		
3rd	$3n_1$	$6n_1^2$	$10n_1^3$			
2nd	$4n_1$	$10n_1^2$				
1st	$5n_1$					

萨马瓦尔说明了该表的构造方法："把右边 n_1 加到左边 n_1 上，左边的项即为 $2n_1$；右边的 n_1 乘以左边的 $2n_1$，加上第 2 项(n_1^2)，第 2 项(这里指 4th 行，以下同)将是 $3n_1^2$；右边的 n_1 乘以第 2 项 $3n_1^2$，加上第 3 项(n_1^3)，第 3 项将是 $4n_1^3$；右边的 n_1 乘以第 3 项($4n_1^3$)，加上第 4 项(n_1^4)，第 4 项将是 $5n_1^4$. 这样就完成了第 4 行的计算."[①]若记 $f(x)=x^5=N$，则上面的估根计算即相当于一次减根变换 $x=n_1\cdot 60^n+x_1\cdot 60^{n-1}$，减根方程为

$$\sum_{i=1}^{5}\mathrm{C}_5^i\cdot n_1^{5-i}\cdot 60^{5n-i}x_1^i=N-n_1^5\cdot 60^{5n}.$$

上表的构造以另一种形式展现了萨马瓦尔的调整变换. 我们发现，该表中的系数是二项式 $(a+b)^n(n=1,2,\cdots,5)$ 的展开式系数(缺少其中一项的最高次幂系数 1)，斜对角线 $5n_1, 10n_1^2, 10n_1^3, 5n_1^4$ 分别乘上因子 $60^{5n-i}(i=4,3,2,1)$ 后正是变换方程(1)的 1 次幂、2 次幂、3 次幂、4 次幂的系数. 经过减根、调整变换和移位后，萨马瓦尔得到下面形式的排列(表Ⅳ[②]).

第一行	0					6					0					0
第五行					24	7	3	43	36	48	8	16	52	30		
第四行					1	48										
第三行							36									
第二行								6								
第一行										30	0					0

① R. Rashed, *The Development*, p. 94.

② R. Rashed, *The Development*, p. 97.

作第二次估根，为 12. 重复上面的计算过程. ①第二次减根变换为 $60^{n-1}x_1 = n_2 \cdot 60^{n-1} + x_2 \cdot 60^{n-2}$，减根方程为

$$\sum_{i=1}^{5} C_n^i \cdot n_1^{5-i} \cdot 60^{n(5-i)} \left(\sum_{j=1}^{i} C_i^j \cdot n_2^j \cdot 60^{(i-j)(n-2)} \cdot x_2^{i-j} \right)$$
$$= N - (n_1 \cdot 60^n + n_2 \cdot 60^{n-1})^5.$$

和早期库斯耶尔的开方过程相比，一个明显的区别就是萨马瓦尔的调整变换已不再涉及额外因子，整个过程是一个简单彻底的随乘随加过程，与现在所谓的鲁菲尼—霍纳算法基本上是一致的. 萨马瓦尔的开高次方的过程似乎是库斯耶尔开立方过程的进一步推广和发展. 约两个半世纪之后，卡西在其著作《算术钥》中也给出了开高次方的同样的方法. ②

卡西生于卡尚(al-Kāshānī)，1429 年卒于撒马尔罕. 卡西是阿拉伯帝国中世纪最后一位著名的天文学家和数学家. 他曾是一个医生，但他渴望从事天文和数学的研究. 在长期贫困和彷徨之后，他终于在撒马尔罕找到了一个稳定而又荣耀的职位，即在苏丹帝国国王乌鲁伯格(Ulugh Bēg，1394—1449)的官邸协助策划开展科学工作. 在此期间，卡西协助乌鲁伯格筹划建立了天文台，并担任第一任台长. 他的学识也日臻成熟，连续完成他一生中最有价值的著作. 1427 年写成《圆周论》(*Risāla al-Muhītīyya*, *Treatise on the Circumference*)，得到当时世界上最精确的圆周率值. 1427 年完成《算术钥》，这是一本初等数学的百科全书. 在此之前，他还著有另一本著作《论弦与正弦》(*Risāla al-Watar wa'l-jaib*, *Treatise on the Chord and Sine*). 另外，卡西参与制定《乌鲁伯格历》，这是一部关于天文、历法的著作，包括星表和数学用表. 卡西为此投入了巨大的精力并做出了重要贡献. 他生前只完成了开头的理论部分，这部历法在卡西死后很多年才由他的后继者完成.

卡西开高次方的过程和萨马瓦尔的几乎完全相同. 所不同的是：一方面，表的说明排列不同. 卡西的说明由下至上分别为："根行"(即第 5 数行)、"平方行"(即第 4 数行)、"立方行"(即第 3 数行)、"四次方行"(即第 2 数行)、"数行"和"结果行"，是相对于每次估计所得根的数字的运算和剩余被开方数以及所得根

---

① 第二次估根后的计算以及下面的步骤，参见 R. Rashed, *The Development*, pp. 97—101.

② J. L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, 1986, pp. 53—63. 或 P. Luckey, *Die Ausziehung*, pp. 217—274.

而言.如第一次估计为n_1,则由下至上分别为$n_1 \cdot 60^{5n}$,$n_1^2 \cdot 60^{5n}$,$n_1^3 \cdot 60^{5n}$,$n_1^4 \cdot 60^{5n}$,$N-n_1^5 \cdot 60^{5n}$,$n_1 \cdot 60^n$.而萨马瓦尔则以简单的"第一行"……"第五行"、"第一行"来表示.前者在意义表述上较后者清晰.另一方面,卡西在一张表中描述了整个计算过程,其中包含每次估根计算后的详细的调整变换过程,萨马瓦尔则未然.萨马瓦尔和卡西在著作中都没有提及各自前辈们(或同时代人)在这方面的工作,但从不同时代所出现的开方法的过程来看却存在着前后的继承关系.

在中国,由开平方、开立方推广到开高次方目前认为是由贾宪突破的.贾宪的开高次方过程和萨马瓦尔以及卡西的几乎完全相同.所不同的是:一方面,最上行根的数字的位置放置不同,贾宪将每次估根数字放于该次估根位置之处.另一方面,贾宪的排列最下面多出了一行"借算"行,而"借算"正是变换方程的最高次项系数,由此构成完整的位置排列,且"借算"在计算过程中参与计算.后者则未然.他是以最上端保持不动的根的数字来替代"借算"在计算中的作用,变换方程的最高次项系数无法表达,这个问题存在于不同时期的所有阿拉伯学者的开方法中.然而,最高次项系数的缺少只是影响到变换方程系数排列的完整性,并非开方过程的实质.从方法出现的时间上看,贾宪的"增乘开方法"大约在1023至1050年之间.萨马瓦尔虽然生活的年代比贾宪约晚一个世纪,他的作品也完成于1172年,但他在对方法的解释中明确地假设读者已经熟悉方法中所包含的各种运算.因此,这种开方法在阿拉伯的出现也许更早一些.由此看来,开高次方,中国人和阿拉伯人可能各自独立地给出了他们的方法.

总之,通过前面的分析比较,对于中世纪阿拉伯的开方法,我们可以得出下面的结论:

(1) *阿拉伯早期的开方法可能受中国古代开方术的影响.*阿拉伯人从印度人那里获得了大量的他们所需要的知识,作为进一步发展的基础.然而,这些知识可能并不全是印度人首先发现的,也包括印度在和其他地区的文化交流中由其他地区传入印度的.中古时期的印度数学保留着不少希腊数学与中国数学的痕迹,特别是印度与中国的文化交流更是源远流长.虽然由于印度史料的保存问题,没有留下可靠的历史记载,但从印度中古时期保留下来的数学著作中可以看出,印度数学在不少方面可能受到中国的影响.如开方法、重差术、三项法、四则运算等.因此,阿拉伯人从印度得来的(或是由印度人带到阿拉伯的)开方法可能是印度人从中国获得的,即阿拉伯人间接地受到中国开方术的影响,印度是中间媒介.另一方面,4世纪中叶以后,佛教徒交往进入鼎盛时期.不但有众

多的印度僧人来到中国传教，更有大量的中国有道高僧前去印度取经，且不少在印度作过长期停留．这些僧人中不乏在科学和数学上有相当造诣之人．通过他们，阿拉伯人也可能得到中国的开方术．从这种意义上讲，虽然也涉及印度，但我们可以说中国早期的开方术可能直接影响到阿拉伯学者．再者，在阿拉伯国家也滞留着一批中国商人，通过他们，阿拉伯学者也可能直接接触到中国数学．

(2) 阿拉伯开高次方的鲁菲尼—霍纳算法和中国的“增乘开方法”可能是在各自早期开方法的基础上独立发展而来的．前面的分析可以看出，一种可能就是萨马瓦尔给出的开高次方法并不完全是萨马瓦尔自己的工作，早期的开方法是其思想基础这是可以肯定的．萨马瓦尔之前或同时代的“凯拉吉学校”的成员们为这种方法的建立作出了相当的贡献，或者进一步说他们已经知道了这种方法，而萨马瓦尔的工作是对他们的工作的发展，或者说是完善和总结．因此，我们可以说，开高次方法是“凯拉吉学校”的成员们集体工作的结晶．也就是说，阿拉伯开高次方的鲁菲尼—霍纳算法的出现当在10世纪末到1172年之间，且在1172年之前至少“凯拉吉学校”的成员们已经清楚掌握该方法中包含的各种运算．中国的“增乘开方法”是在早期开方术的基础上推广、发展而来，这是确信无疑的．二者产生的时间非常接近，考虑当时的交通条件和信息传播速度，我们认为阿拉伯人和中国人各自独立地建立了他们的开高次方法．

§4.2 阿拉伯代数方程数值解法的比较研究

我们知道，开方过程中，从求方根的第二位数字起，下面的排列即为含有较低次幂的方程的排列，即以下步骤可看做与方程的求解有关．但是，尽管阿拉伯学者尤克里迪希、库斯耶尔、奥马·海亚姆、萨马瓦尔以及卡西等都曾讨论过开方法，但他们均未给出依靠其开方法的单独的代数方程的数值解法．只是12世纪的学者沙拉夫丁·图西在其代数学著作①中详细地描述了这种方法．这里，我们一方面介绍沙拉夫丁·图西的方法，考查它与阿拉伯开方法的联系和区别；另一方面，也将其与同时代或之前的中国有关方程的数值解法作以比较．

---

① R. Rashed 编辑翻译了沙拉夫丁·图西的代数学著作，见 Sharaf al-Din al-Tūsi, *Oeuvres Mathematiques*, Vol. 2, Paris, Les Belles Lettres, 1985.

4.2.1 中国代数方程的数值解法

中国古代解二、三次方程分别称为“开带从平方”和“开带从立方”，是利用开平方、开立方算法来完成的. 虽然目前对此已有足够深刻的研究，但为了便于下文的比较，我们加以引述，并就与阿拉伯方程数值解法联系较大的二、三次方程略费笔墨.《九章算术》“勾股章”第 20 问即相当于列方程 $x^2+34x=71\ 000$ 求解.《张邱建算经》中第 22 问相当于列方程 $x^2+68\frac{3}{5}x=1\ 029\frac{17}{45}$ 求解. 但是，把开立方法推广到三次方程则是一个漫长的过程. 据考证①，5 世纪中国数学家祖冲之（429—500）不仅已经知道“开带从立方”的方法，而且已能推广到系数可正可负的二次方程和三次方程. 但祖冲之的著作《缀术》失传已久，其解法无从详考. 之后，唐初王孝通的著作《辑古算经》介绍了“开带从立方”法，所载三次方程均形如

$$x^3+ax^2+bx=c \quad (a>0, b>0, c>0).$$

这是中国现存的最早记载“开带从立方”的著作. 然而，上述文献均未给出“开带从平方”和“开带从立方”的具体步骤. 对其解法有详细记载的现存最早的著作是杨辉的《算法通变本末》(1274 年). 书中写道：“刘益以勾股之术治演段锁方，撰议古根源二百问，带益隅（首项为负者）开方实冠前古.”“引用带从开方正负损益之法，前古之所未闻也.”在《田亩比类乘除捷法》(1275 年) 序中杨辉又写道：“辉择可作关键题问者，重为详悉著述，推广刘君垂训之意.”②明显地，杨辉给出的解法得之于刘益（12 世纪）. 他引用的第一题即相当于解二次方程

$$x^2+12x=864.$$

设 $f(x)=x^2+12x$，$N=864$，$a=12$，其图式过程如下：③

商

实　　8 6 4　N

方法

---

① 钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社，1982，第 89 页. 或梅荣照：《贾宪的增乘开方法》，载《自然科学史研究》，第 8 卷第 1 期，1989，第 3 页.

② 钱宝琮：《中国数学史》，第 154—155 页.

③ 杨辉所列图式仅有前三步，最后一步的减法运算是本文作者为了与后面阿拉伯开平方法进行完整地比较依据杨辉所述添加的.

从法	1 2	$a \cdot 10$
隅	1	10^2

商	2	x_1
实	8 6 4	N
方法	2	$x_1 \cdot 10$
从法	1 2	$a \cdot 10$
隅	1	10^2

商	2 4	x_1+x_2
实	2 2 4	$N_1=N-x_1^2-ax_1=N-f(x_1)$
方法	4 4	$2x_1+x_2$
从法	1 2	a
隅	1	1

商	2 4	x_1+x_2
实		$N_2=N_1-(2x_1+x_2)x_2-ax_2=N-f(x_1+x_2)=0$
方法	4 4	$2x_1+x_2$
从法	1 2	a
隅	1	1

可以看出，这里的“方法”和“从法”实质上就是开方运算中的“定法”，刘益将它们分置于两行.除此之外，刘益解二次方程的这种方法和早期的开方步骤是一致的.刘益求解二次方程，并未仅限于系数为正的情形，他也给出了诸多一次项系数为负和首项系数为负的方程的具体解法.如 $-x^2+60x=864$，记 $f(x)=-x^2+60x$，$a=60$，$N=864$，则其解法如以下图式所示：

商		
实	8 6 4	N
从方	6 0	a
负隅	−1	−1

商	2 0	x_1
实	8 6 4	N

从方	6 0	$a\cdot 10$
负隅	−1	-10^2

商	2 0	x_1
实	6 4	$N_1=N-(a-x_1)x_1=N-f(x_1)$
从方	4 0	$a-x_1$
负隅	−1	-1

商	2 0	x_1
实	6 4	$N-f(x_1)$
从方	2 0	$a-2x_1$
负隅	−1	-1

商	2 4	x_1+x_2
实	0	$N_2=N_1-(a-2x_1-x_2)x_2=N-f(x_1+x_2)$
从方	1 6	$a-2x_1-x_2$
负隅	−1	-1

显然，这里的"从方"作用相当于前一方法中的"方法"和"从法"，实质上，就是开方运算中的"定法". 这种方法和开方步骤是完全一致的. 刘益称其为"减从法". 同样对于该例，刘益还给出了另外一种解法，即"益积法". 设第一次减根变换为 $x=x_1+y$，则"减从"和"益积"两种方法的布式可分别表示如下：

"减从"：$-y^2+[(a-x_1)-x_1]y=N-(a-x_1)x_1$；

"益积"：$-y^2-2x_1y+ay=N+x_1^2-ax_1$.

另外，杨辉引用的第 18 题相当于解四次方程

$$-5x^4+52x^3+128x^2=4\ 096.$$

虽然方程的根只有一位数字，但其解法却是"增乘开方法"在一般方程上的推广.

13 世纪，中国古代高次方程数值解法发展到了巅峰. 1247 年，秦九韶(1202—1261)撰写的《数书九章》是这一成就的标志. 书中给出了高次方程的表示方法①，并依其系数情况对高次方程进行了分类. 如一般形式的 n 次方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

---

① 钱宝琮:《中国数学史》，第 157—158 页. 或吴文俊:《秦九韶与〈数书九章〉》，第 410 页.

当$|a_0|\neq 1$时，称之为“开连枝某乘方”；当方程的奇次幂系数皆为零时，称之为“开玲珑某乘方”．所列的方程除a_n常为负值以外，方程的其他系数的正负已不受任何限制，即秦九韶的方法适用于一般的（有正根）高次方程．他称这种方法为“正负开方术”．其步骤除减根运算中由“增乘开方法”的减法运算变为这里的加法运算外，其他步骤和“增乘开方法”完全一致，整个运算步骤已是彻底的随乘随加过程，和现在所谓的鲁菲尼—霍纳算法基本是一致的，是“增乘开方法”在一般方程上的推广和发展．

4.2.2 沙拉夫丁·图西代数方程的数值解法

代数方程的数值解法在方程理论研究的早期通常是与开方过程紧密地联系在一起的．沙拉夫丁·图西在其著作中虽然给出了方程的数值解法，但他却未提及最简单情形$x^n=N(n=2,3,\cdots)$的解法，即开方法．在他看来，这对于当时从事数学研究的学者来说好像是必知的，无需介绍的．

现存的沙拉夫丁·图西的著作是其原作的抄本，抄本的作者删掉了原作中的表格，并对文中的较长段落进行了压缩．[①]下面我们给出的表格是拉塞得（R. Rashed）依据抄本中原表格的附文重新构造的．沙拉夫丁·图西给出的二次方程和三次方程的数值解法如下：

a. 二次方程的解法

设二次方程为$x^2+ax=N$，$N=n_0\cdot 10^m+n_1\cdot 10^{m-1}+\cdots+n_m$，$k$为$a$的阶．沙拉夫丁·图西依常数项与一次项系数阶的关系分两种情形讨论：

（Ⅰ）　$\left[\frac{m}{2}\right]\leqslant k$；

（Ⅱ）　$\left[\frac{m}{2}\right]>k$.

其中$\left[\frac{m}{2}\right]$为$\frac{m}{2}$的整数部分．下面我们结合沙拉夫丁·图西给出的具体例子进行说明．

（Ⅰ）　$\left[\frac{m}{2}\right]\leqslant k$．开平方过程中求平方根的第二位数字以下的过程符合这

① Adel Anbouba, Sharaf al-Din al-Tūsī, *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 1, 1970, p. 514.

一条件. 事实上，设 $x^2=N$，作根的第一位估计，设为 x_1，作减根变换 $x=x_1\cdot 10^n+y$，则减根方程为

$$y^2+2x_1\cdot 10^n\cdot y=N-x_1^2\cdot 10^{2n}.$$

该方程的一次项系数 $2x_1\cdot 10^n$ 的阶 $k\geqslant n$，常数项 $N-x_1^2\cdot 10^{2n}$ 的阶 $m\leqslant 2n$，所以 $\left[\frac{m}{2}\right]\leqslant k$. 沙拉夫丁·图西给出了方程 $x^2+578\ 442=2\ 123x$ 的解法. 设 $f(x)=-x^2+2\ 123x$，$a=2\ 123$，$N=578\ 442$，则如下表（表 A ）①：

			3	2	1	
		3	2			
	3					
	0		0		0	
5	7	8	4	4	2	N
5	4	6	9			$x_1(a-x_1)=f(x_1)$
			0		0	
	3	1	5	4	2	$N_1=N-f(x_1)$
	3	0	0	6		$(a-2x_1-x_2)x_2=f(x_2)$
					0	
		1	4	8	2	$N_2=N-f(x_1+x_2)(=N_1-f(x_2))$
		1	4	8	2	$(a-2x_1-2x_2-x_3)x_3$
		1	4	8	2	$a-2x_1-2x_2-x_3$
		1	4	8	3	$a-2x_1-2x_2$
	1	4	8	3		$(a-2x_1-2x_2)\cdot 10$
	1	5	0	3		$(a-2x_1-x_2)\cdot 10$
	1	5	2	3		$(a-2x_1)\cdot 10$
1	5	2	3			$(a-2x_1)\cdot 10^2$
1	8	2	3			$(a-x_1)\cdot 10^2$
2	1	2	3			$a\cdot 10^2$

明显地，沙拉夫丁·图西的计算表格分为三个部分，即（1）根的部分；（2）减根变换部分；（3）调整变换部分. 在（1）中，所得根的数字的位置移动和早期库斯耶尔开平方中的相同，但排列方式有所区别. 库斯耶尔将所得数字放在

① R. Rashed, *The Development*, p. 156. 沙拉夫丁·图西以语言的形式给出了右边的说明，R. Rashed 以附号的形式表示出来. 在沙拉夫丁·图西的著作中，左边的表格被抄录者删除，这里是 R. Rashed 依据右边的附文说明重新构造的. 后面的表 B、表 C 也是如此.

被开方数上面一行之中，而沙拉夫丁·图西则每次得到根的数字后连同前面已得数字重新放置一行，在位置排列上与5世纪中国算书《张邱建算经》中记载的开平方、开立方方式相似.[①]在(2)中，沙拉夫丁·图西首先估计根的第一位数字 x_1，作减根变换 $x=x_1+y$，则减根方程为

$$-y^2+(a-2x_1)y=N-(a-x_1)x_1.$$

由 $f(x_1)=-x_1^2+ax_1$，得 $N_1=N-f(x_1)$. 经(3)中调整变换后，估计根的第二位数字 x_2，作减根变换 $y=x_2+z$，则减根方程为

$$-z^2+(a-2x_1-2x_2)z=N_1-(a-2x_1-2x_2)x_2=N-(a-x_1)x_1-(a-2x_1-x_2)x_2.$$

由

$$f(x_1+x_2)=-(x_1+x_2)^2+a(x_1+x_2)=(a-x_1)x_1+(a-2x_1-x_2)x_2,$$

得 $N_2=N-f(x_1+x_2)$. 以下的计算重复上面的步骤. 这里，沙拉夫丁·图西的排列与其后卡西的开高次方[②]的排列非常相似，所不同的就是前者在每次估根位置均放置0以作标记(稍后的萨马瓦尔也采用了这种记法)，而后者则不然. (3)中的减根变换后的运算和调整变换过程与早期尤克里迪希的开平方，库斯耶尔、纳萨维(al-Nasawī)等的开方过程中的完全相同. 因此说，当 $\left[\frac{m}{2}\right]\leqslant k$ 时，沙拉夫丁·图西二次方程的数值解法追随于早期的开方过程，只是从整体上看，他将每次计算都汇集于一个表中，且增加了 $f(x_1+x_2+\cdots+x_i)$ 行的排列，而早期的开方过程却未然.[③]卡西的开方过程除根的排列与沙拉夫丁·图西的不同之外，其他几乎完全相同.

(Ⅱ) $\left[\frac{m}{2}\right]>k$. $x^2+31x=112\,992$，设 $f(x)=x^2+31x$，$a=31$，则沙拉夫丁·图西的解法过程如下(表B)：[④]

---

① Karine Chemla, "Similarities Between Chinese and Arabic Mathematical Writings: (Ⅰ)Root Extraction", *Arabic Sciences and Philosophy*, Vol. 4, 1994, pp. 254—257.

② J. L. Berggren, *Episodes in the Medieval Islam*; Springer-Verlag, 1986, pp. 53—63. 或 P. Luckey, *Die Ausziehung*, 120, 1948, pp. 238—241.

③ 参见前一节内容.

④ R. Rashed, *The Development*, p. 154.

			3	2	1	
		3	2			
	3					
	0		0		0	
1	1	2	9	9	2	N
	9					x_1^2
		9	3			ax_1
			0		0	
	1	3	6	9	2	$N_1=N-x_1^2-ax_1(=N-f(x_1))$
			4			x_2^2
	1	2	6	2		$(a+2x_1)x_2$
					0	
			6	7	2	$N_2=N-x_2^2-(a+2x_1)x_2(=N-f(x_1+x_2))$
					1	x_3^2
			6	7	1	$(a+2x_1+2x_2)x_3$
			6	7	1	$a+2x_1+2x_2$
		6	7	1		$(a+2x_1+2x_2)\cdot 10$
		6	3	1		$(a+2x_1)\cdot 10$
	6	3	1			$(a+2x_1)\cdot 10^2$
		3	1			$a\cdot 10^2$

这种情形与(Ⅰ)的过程虽然都来源于开方法,具有实质的相似之处,但也存在着一些差别.从表的排列上看,前者将二次项和一次项放置于一行之中作为一个整体,即方程具有形式

$$(a-2x_1-\cdots-2x_i-y)y=N-f(x_1+\cdots+x_i),$$

而后者则列于两行分别计算,即方程具有形式

$$y^2+(a+2x_1+\cdots+2x_i)y=N-f(x_1+\cdots+x_i).$$

但无论是$\left[\frac{m}{2}\right]>k$还是$\left[\frac{m}{2}\right]\leqslant k$的情形,沙拉夫丁·图西的解法均追随于早期的开方法.

b. **三次方程的解法**

三次方程$x^3+a_1x^2+a_2x=N$,由于同时涉及一次项、二次项系数a_2,a_1,沙拉夫丁·图西依它们的阶数之间的关系,分为三种情形分别论述.若记m为N的阶数,k_1,k_2分别为a_1,a_2的阶数,即

(Ⅰ′) $\left[\frac{m}{3}\right]<k_1,\left[\frac{k_2}{2}\right]<k_1$;

(Ⅱ′) $\left[\frac{m}{3}\right]<\left[\frac{k_2}{2}\right],k_1<\left[\frac{k_2}{2}\right]$;

(Ⅲ′) $\left[\frac{m}{3}\right]>k_1,\left[\frac{m}{3}\right]>\frac{k_2}{2}$.

如 $x^3+6x^2+3\,000\,000x=996\,694\,407$，设 $f(x)=x^3+6x^2+3\,000\,000x$，$a_1=6$，$a_2=3\,000\,000$，$N=996\,694\,407$. 这是属于类型（Ⅱ′）的方程. 沙拉夫丁・图西的解法过程如下（表 C）：

						3	2	1	
				3	2				
		3							
		0			0			0	
9	9	6	6	9	4	4	0	7	N
	2	7							x_1^3
9			5	4					$3\left(x_1\cdot\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2\right)x_1$
					0			0	
	6	9	1	5	4	4	0	7	$N_1=N-x_1^3-3x_1\left(\frac{1}{3}a_1x_1\right)=N-f(x_1)$
					8				x_2^3
	6	5	8	3	4	4			$3\left[x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2+\left(x_1+\frac{1}{3}a_1\right)x_2\right]x_2$
								0	
		3	3	1	2	0	0	7	$N_2=N-f(x_1+x_2)$
								1	x_3^3
		3	3	1	2	0	0	6	$3\left[\left(x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2\right)+\left(x_1+\frac{1}{3}a_1\right)x_2+\left(x_1+\frac{1}{3}a_1+x_2\right)x_2+\left(x_1+x_2+\frac{1}{3}a_1\right)x_3\right]x_3$
		1	1	0	4	0	0	2	$x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2+\left(x_1+\frac{1}{3}a_1\right)x_2+\left(x_1+\frac{1}{3}a_1+x_2\right)x_2+\left(x_1+x_2+\frac{1}{3}a_1\right)x_3$
		1	1	0	3	6	8		$x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2+\left(x_1+\frac{1}{3}a_1\right)x_2+\left(x_1+\frac{1}{3}a_1+x_2\right)x_2$
	1	1	0	3	6	8			$\left[x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2+\left(x_1+\frac{1}{3}a_1\right)x_2+\left(x_1+\frac{1}{3}a_1+x_2\right)x_2\right]\cdot 10$
	1		9	7	2	4			$\left[x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2+\left(x_1+\frac{1}{3}a_1\right)x_2\right]\cdot 10$
	1		9	1	2				$\left(x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2\right)\cdot 10$
1		9	1	2					$\left(x_1^2+2x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2\right)\cdot 10^2$
1				6					$\left(x_1\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2\right)\cdot 10^2$
1				2					$\frac{1}{3}a_1\cdot 10^4+\frac{1}{3}a_2\cdot 10^2$

和解二次方程的过程相似,这里,沙拉夫丁·图西也将其表格分为三个部分.他将方程的二次项和一次项系数放置于一行之中,完成部分运算后,作为一个整体独立于立方项参与减法运算.另外,明显地,沙拉夫丁·图西表中排列的一、二次项并非完整的,而是它们的$\frac{1}{3}$,即他加入了一个新的因子$\frac{1}{3}$,并在减法运算时重新引入了因子 3 .事实上,沙拉夫丁·图西使三次方程具有形式

$$x^3+3m_1x^2+3m_2x=N,$$

使得其与开立方过程中根的第一位数字计算后的减根方程形式相同.其他两种类型的三次方程,沙拉夫丁·图西的计算过程与(Ⅱ′)相同.三次方程计算表格的排列,都采用了表 C 的形式,几乎完全一样,只是在一些具体的例子中,表格的调整变换部分略有区别.如方程 $x^3+12x^2+102x=34\ 345\ 395$,计算表在表 C 的基础上,最下端增加了三行,即:$\frac{1}{3}a_2\cdot 10^4$,$\frac{1}{3}a_2\cdot 10^2$,$\frac{1}{3}a_2$;方程 $x^3-30x^2-600x=29\ 792\ 331$,表的最下端则增加了$\frac{1}{3}a_1\cdot 10^4$,$\frac{1}{3}a_2\cdot 10^2$ 两行的排列.沙拉夫丁·图西三次方程的解法除调整变换部分随具体例子在排列上与二次方程类型(Ⅱ)的相应部分稍有不同外,整个计算过程是一致的,似二次方程解法的推广.再来分析沙拉夫丁·图西分类讨论的原则.类型(Ⅰ′),如 $x^3+30\ 000x^2+20x=3\ 124\ 315\ 791$,沙拉夫丁·图西以常数项除以二次项系数来估计方程根的第一位数字.他写道:"在表中放置平方数作为除数,常数为被除数,系数开方,我们得到它的阶."①类型(Ⅱ′),如 $x^3+6x^2+3\ 000\ 000x=996\ 694\ 407$,他则以常数项除以一次项系数来估计方程根的第一位数字. 类型(Ⅲ′),如 $x^3+12x^2+102x=34\ 345\ 395$,他寻找适当的正整数 x_1,使得 $x_1^3<34$,且$(10^2\cdot x)^3+12(10^2\cdot x_1)^2+102\cdot 10^2\cdot x_1\leqslant 34\ 345\ 395$ 确定方程根的第一位数字.实质上,沙拉夫丁·图西是根据确定方程根的第一位数字的方式将三次方程分为上面三类的.二次方程同样如此.另外,从某种程度上讲,尽管不是很明确,但可以看出,沙拉夫丁·图西二、三次方程的数值解法是一般性的.

4.2.3 阿拉伯算法与中国算法的比较

两者的不同点:

(1) 布式不同. 沙拉夫丁·图西将整个过程汇集于一表,略去了大量的重

① R. Rashed, *The Development*, p. 158.

复部分. 中国学者,各个步骤配合以不同的图式,整个过程是各个图式的组合. 中国学者的布式较沙拉夫丁·图西的多出一特殊的"隅"行(借算行,代表方程的首项系数),且"隅"行在整个过程中参与减根运算和调整变换.

(2) 分类不同. 沙拉夫丁·图西依方程的系数的阶和常数项的阶之间的关系,或者说依估计方程根的第一位数字的方法将方程分为不同类型,而中国学者则依方程的首项系数的正负、绝对值大小等方程的其他特征对方程进行分类.

下面具体分析沙拉夫丁·图西和刘益关于二次方程解法的异同. 沙拉夫丁·图西将二次方程分为两类,显然,当$\left[\frac{m}{2}\right]\leqslant k$时,特别当方程的首项系数为负时,他的计算步骤和刘益的"减从法"①完全相同,是一种简单的随乘随加过程(每次减根运算伴随一减法计算). 对于另一类,即当$\left[\frac{m}{2}\right]>k$时,设方程$x^2+ax=N$的第一次减根变换为$x=x_1+y$,沙拉夫丁·图西的布式(未给出首项系数的排列)为

$$y^2+(a+2x_1)y=N-x_1^2-ax_1,$$

而刘益正系数二次方程的布式则为

$$y^2+ay+2x_1y=N-x_1^2-ax_1.$$

对于三次方程,5 世纪的祖冲之已经知道其解法. 但无论是祖冲之,还是王孝通等,现存的文献中均未留下他们的具体求解过程. 12 世纪的刘益对于高于二次的方程则在贾宪"增乘开方法"的基础上予以解决. 特别是 13 世纪的秦九韶、李冶等又将"增乘开方法"发展为一般方程的数值解法——相当于西方所谓的鲁菲尼—霍纳算法. 由前面的分析可以看出,沙拉夫丁·图西三次方程的数值解法虽然也是一种随乘随加的过程,但严格地说来并非鲁菲尼—霍纳算法. 另外,沙拉夫丁·图西未涉及更高次方程的数值解法.

两者的相同点:

(1) 方法的一般性. 沙拉夫丁·图西的方法对于方程的系数并没有限制,可以为正,也可以为负,适用于一般的二、三次方程,中国学者的方法也是如此,即两者都具有一般性.

---

① 刘益的"减从法"并不要求二次方程满足条件$\left[\frac{m}{2}\right]\leqslant k$.

(2) 讨论的根的范围相同. 沙拉夫丁·图西和中国学者所讨论的方程都是有正根的方程,且求得的都是方程的一个正根. ①

总之,从两种解法及其发展趋势上看,沙拉夫丁·图西代数方程的数值解法和中国学者的数值解法受到各自传统开方法的启示,而又沿着不同的途经发展. 前者,与其早期传统开方法虽有一些差别,但整个计算程序力求与早期传统相吻合. 后者,则对早期传统的开方术作了进一步推进和发展,沿着一条趋于机械化、程序化的途径进展. 从两者关系上看,中国开方术可能直接地或通过印度间接地影响了阿拉伯传统,这也使得两个传统的代数方程的数值解法呈现出某种程度的相同和相似. 沙拉夫丁·图西和刘益是同时代人,他们之间不可能存在直接的影响关系. 中国早期的方程求解是隐含于"开方术"中的,没有独立给出具体的求解方法. 虽然这种求解也具有一般性,但从现在著作中所出现的例子来看,当时的人们似乎将方程局限于系数仅为正的情形,并未推广到一般系数的方程. 到 5 世纪时,数学家们将这种方法推广到系数可正可负的一般二、三次方程的数值解法. 刘益之前的中国的方程解法未留下具体的过程步骤,但从开方法的发展看,中国的方程的数值解法也是一脉相承的. 中国早期的解法是否影响到沙拉夫丁·图西尚待考证,但中国的方程的数值解法和沙拉夫丁·图西的方程的数值解法分别与各自早期的开方法密切相关这是毫无置疑的. 对于沙拉夫丁·图西二、三次方程的数值解法,我们认为,极可能是在早期开方法的基础上建立起来的,即沙拉夫丁·图西和中国学者各自独立地得到了他们的方法.

一个比较值得引起注意的问题是,中国贾宪将开平方、开立方推广到开高次方的"增乘开方法"之后不长的时期,学者们即将其应用于解高次方程,到 13 世纪秦九韶将其发展成为应用于一般高次方程的完整、系统的"正负开方术"(鲁菲尼—霍纳算法),而阿拉伯学者至迟到萨马瓦尔的时代已有了成熟的开高次法(鲁菲尼—霍纳算法),且同时代的沙拉夫丁·图西也已将早期的开平方、开立方应用于解数值方程,但终未出现高次方程的数值解法. 为什么中国实现了由开高次方到解高次数值方程的突破,而阿拉伯却未然呢? 作者认为有以下几个方面的原因:(1) 方程系数正负的认识. 我们知道,对于 $x^n=N$,开高次方

---

① 沙拉夫丁·图西在其代数学著作的第二部分,用几何的方法具体地讨论了三次方程的(正)根和方程的系数之间的精确关系,这样,从整卷代数学著作来看,他事实上给出了三次方程的所有(正)根.

时，设第一次议根为 x_1，减根变换为 $x=y+x_1$，则减根方程为

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \cdot y^{n-i} \cdot x_1^i = N - x_1^n.$$

方程的系数和常数项$(N-x_1^n)$均为正，且以后各次减根变换所得减根方程的系数和常数项亦均为正，始终保持不变. 而对于解高次方程情形则大不相同. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，若 $f(x)=0$ 的系数 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为正，a_0 为负，求解过程中，变换方程的系数和常数项的符号变化情况同开高次方. 若方程的系数 a_i 出现负值时，则随着减根变换的进行，减根方程的系数和常数项的符号可能发生变化(如前面我们给出的秦九韶解四次方程的例子). 中国学者把系数均为正的数字三次方程的解法推广到系数可正可负的三次方程的解法很早就已经实现(祖冲之时代). 在以后的漫长历史时期，中国学者对于负数在方程求解过程中的地位和作用已逐渐产生清楚的认识. 刘益称减根变换后方程常数项的符号变化为“翻积”，而秦九韶则称为“换骨”(常数项由负变正). 而对于常数项负得更多的变化，秦九韶称为“投胎”，目的在于指导开方者在开方过程中不要因为符号的变换或负值大小的变化而有所顾虑. 阿拉伯学者(如沙拉夫丁·图西)在解方程的过程中可能已经认识到负数的地位，但相对较晚，认识仍不够深刻，这是最主要的原因之一. (2) 方程根的估计. 开高次方和解高次方程根的估计是有差别的. 开高次方过程中对减根变换方程作根的下一步估计时，主要依据较低次幂的系数，而解高次方程自根的第一位数字的估计起，就是依据方程各项的综合考查而定，并非简单地靠方程的某一些项. 中国历史悠久的代数方程的数值解法以及中国数学长于算法的特点，使得中国学者在这方面积累了大量的知识，这是其他国家的学者远莫能比的(阿拉伯早期主要倾向于方程的精确解法，只是到较晚时期才出现二、三次方程的数值解法). 另外，方程的布列问题也是一个方面. 高次方程不像二、三次方程那样容易布列，中国学者(如刘益、秦九韶等)给出了高次方程的系统的表示方法，这也是其他国家的学者所没有做到的. 综合以上原因，中国学者由开平方、开立方推广到后来的增乘开方法之后，很自然地就实现了开高次方到解高次方程的过渡. 阿拉伯学者虽然给出了开高次方的方法(相当于鲁菲尼—霍纳算法)，但随着 12 世纪之后，阿拉伯科学的迅速衰退，他们没能将这一方法发展推广到高次方程.

第五章 阿拉伯的多项式理论和二项式定理

早期的多项式理论和二项式定理是随着开方和方程的求解而逐渐产生和发展的，并反过来应用于开方和方程的求解之中. 印度和中国的代数学(以及古希腊的几何代数)中虽也涉及多项式运算的初等知识，但均未作为独立的课题加以研究. 阿拉伯学者则首次以此作为专门的代数计算的理论做了较为系统、完整的研究，特别是凯拉吉和萨马瓦尔的工作最为突出. 虽然他们的论述仅限于多项式四则运算的一些基本知识，尚未展开更深层次的探讨，但终究是把多项式理论作为代数学中一个独立的领域进行讨论. 这是同时期其他国家的学者所没有做到的. 而对于二项式定理，或者说系数三角形的描述，在时间上，阿拉伯和中国几乎是同时的. 本章分两部分分别讨论了阿拉伯的多项式理论和二项式定理.

§5.1 中世纪阿拉伯的多项式理论

代数多项式理论最初是伴随着数的四则运算和代数方程论的发展而产生的. 虽然希腊、印度和中国在代数方程论方面都取得了不同的成就(特别是中国古代高次代数方程的解法)，印度和中国对于数系的发展也做出了巨大贡献，当然在方程论的发展过程中，这些国家的学者也不可避免地涉及到多项式的四则运算，但对于代数多项式理论则少有专门的论述. 中世纪阿拉伯学者在这方面做出了突出贡献，成为代数多项式理论研究的先驱.

5.1.1 多项式理论的起步——花拉子米、阿布·卡米尔的工作

花拉子米多项式理论方面的工作是多项式理论研究的较早尝试之一. 他的研究仅涉及单项式和二项式的最基本运算：加法、减法和乘法. 在其著作《代数学》(*al-jabr w'al Muqabala*)中论述了数与数的乘法规则之后，他接着写道："当未知量加上数，或未知量减去数，或数减去未知量时，我已经解释的运算规则

(这里指数与数的乘法运算规则)可以适用于未知量的乘法运算."[1]例如,$x+10$乘以$x+10$,他这样写道:"10乘10得100,10乘'东西'得10个'东西';再次,10乘'东西'得10个'东西','东西'乘'东西'为'平方',所以总和为100个迪拉姆、20个'东西'和1个'平方'."另外,他还给出x乘x,$x-10$乘以$x-10$,$10-x$乘以$10-x$,$10-x$乘以$10+x$以及$10+x$乘以$x-10$等具体例子.[2]如果写成一般形式,花拉子米相当于给出了运算规则:

(1) $(ax\pm p)(bx\pm q)=abx^2\pm aqx\pm bpx+pq$;

(2) $(p\pm ax)(q\mp bx)=pq\pm aqx\mp pbx-abx^2$.

其中a,b,p,q为有理数.

此外,他还给出规则:

$a\cdot\sqrt{x}=\sqrt{a^2x}$($a$为正有理数).

对于多项式的这些最基本运算,希腊、印度和中国学者在解方程的过程中已经用到,但却少有把它们作为专题加以论述.花拉子米的这些规则是其后继者们进一步发展的基础之一.

继花拉子米之后,阿拉伯学者阿布·卡米尔(Abū Kāmil,活跃在8世纪末9世纪初)也在多项式方面做了一些工作,主要体现在他的著作《代数学》(*Kitāb fī al-jabr wa'l muqubala*)中.卡米尔《代数学》实际上是花拉子米《代数学》的一个评注,其中很多内容与后者相同,然而也有超出后者内容之处.在阿拉伯国家,他首次使用了指数大于2的幂,如称x^5为"平方一平方一根"、x^6为"立方一立方"、x^8为"平方一平方一平方一平方"等.说明卡米尔已认识到同底的两个多项式相乘,底不变,而幂指数相加.其次,在方程中使用了无理系数,给出无理数的四则运算规则:

(ⅰ) $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}$;

(ⅱ) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$;

(ⅲ) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

并对这些进行了证明.例如对于规则(ⅰ),卡米尔写道:"如果人们希望一个数

---

① *Algebra of Mohammed ben Musa*, Edited and translated by F. Rosen, London, 1831, p. 23.

② *Algebra of al-Khowarizimi*, pp. 95—97.

的根加上另一个数的根使得它们的和是一个平方的根对所有的数都成立，那是不可能的. 但当两个数都是平方，也就是它们都有根时，或者在这两个数中，用一个数除以另一个数，有一个商有根，并且一个数乘以另一个数，它们的乘积是一个有根的平方时，这种情况是可能的. 其他的情形都是不可能的. 两个数相减也是如此."他给出了 9 和 4 两个数的例子，也就是$\sqrt{9}+\sqrt{4}=\sqrt{9+4+2\sqrt{9\cdot 4}}=\sqrt{25}=5$. 紧接着卡米尔用这个例子证明了他的规则. 他的证明如下：

作线段 AB 作为 9 的根，线段 AG 作为 4 的根，如图 5-1.

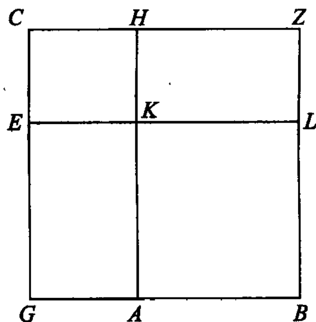


图 5-1

我们希望知道 GB 是某一个数的根. 以 GB 为边构造正方形 $GBZC$，则线段 GB 是 $GBZC$ 的根. 以线段 AB 为边构造正方形 $ABLK$. 延长 AK 交 CZ 于点 H，延长 LK 交 CG 于点 E. 因为 AB 是 9 的根，所以正方形 $ABLK$ 的面积是 9；AG 是 4 的根，所以正方形 $EKHC$ 的面积是 4. AG 等于 EK. 因为长方形 $AKEG$ 的面积是 9 的根 AB 和 4 的根 AG 的乘积，所以为 6. 长方形 $KLZH$ 的面积也是 6. 正方形 $GBZC$ 的面积为 25，线段 GB 是它的根，为 5. 这就是我们想要证明的结论. 可以看出，卡米尔的无理数的四则运算规则是对于完全平方数而言的，他的几何证明与中国古代的"出入相补原理"极为相似，这也是值得我们进一步研究的一个问题. 另外，卡米尔还总结了乘法运算的符号规则：

$$(+a)(+b)=ab;(-a)(-b)=ab;(-a)(+b)=-ab.$$

重新给出花拉子米的二项式运算规则(1)和(2)，并基于乘法交换律、乘法对加法的分配律以及符号规则给出了(1)和(2)的详细代数证明，另外还给出其几何证明. 总之，卡米尔的工作较花拉子米更为全面、抽象.

5.1.2 多项式理论的发展——凯拉吉的工作

凯拉吉的生平我们知之甚少，就连他的名字“凯拉吉”也是数学史家 F. 沃克(F. Woepcke)等在翻译资料时引入的. 但有资料表明公元 1000 年左右，凯拉吉在巴格达工作，10 世纪初他将一部关于代数学的著作呈献给当时的维齐尔阿尔·穆克. 凯拉吉是一位兴趣广泛的学者，在他的手稿中不仅有关于算术、代数学、不定分析和天文学方面的论文，而且还有关于地下水的勘测和寻找等方面的论文. 对于凯拉吉在代数学方面的成就，数学史家 F. 沃克指出：“目前，据我们所知，在阿拉伯人中，凯拉吉首先提出了更完全或更确切的代数计算的唯一理论.”①凯拉吉阅读了丢番图的著作《算术》(*Arithmetica*)，按照花拉子米等阿拉伯学者的代数概念，使用全新的方法说明了代数计算理论，给出了多项式代数的第一个系统阐述. 据目前尚存的凯拉吉手稿和 12 世纪阿拉伯学者萨马瓦尔的记述，我们知道，他写了两部著作：一部是关于实用计算、计算几何和代数问题的《综合算术》(*al-Bādī*)，一部是论述代数的《发赫里》(*al-Fakhri*，约公元 1010 年). 对于多项式的论述主要集中于后者. 论述主要分为三个部分：第一部分首先给出了代数指数的系统研究；第二部分是算术在代数表达式上的应用；最后是多项式代数的一些说明. 对于代数指数的研究，他讨论了两个序列 $x, x^2, x^3, \cdots$；$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \cdots$，并给出序列计算的如下规则：

(a) $\frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} = \cdots$；

(b) $\frac{1}{x^{n-1}} : \frac{1}{x^n} = \frac{x^n}{x^{n-1}}, \quad n=1,2,3,\cdots$；

(c) $\frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{x^m} = \frac{1}{x^{n+m}}, \quad n,m=1,2,3,\cdots$；

(d) $\frac{1}{x^n} \cdot x^m = \frac{x^m}{x^n}, \quad n,m=1,2,3,\cdots$.

由上述规则可知，凯拉吉推广了卡米尔的幂指数相加规则，即由卡米尔的简单幂指数相加推广到幂指数为任意自然数的情形：$\forall n,m \in \mathbf{N}, x^n \cdot x^m =$

① R. Rashed, *al-Karaji*, *Dictionary of Scientific Biography*, New York Scribners, 1970, p. 241.

x^{n+m}，并建立了系统（N，+）和$\left(\left[\frac{1}{x^n}, n\in \mathbf{N}\right], x\right)$之间的对应关系：$n+m\to\frac{1}{x^{n+m}}$.
第二部分，凯拉吉首先考虑将其上述规则应用于单项式的情形，证明了乘法运算的下列规则：

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b};\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

其中a,b,c,d为单项式. 然后进一步考虑多项式的情形，并给出了多项式乘法的一般规则. 凯拉吉虽未明确给出运算的符号规则，但从他著作中运算来看，明显地已经清楚他的前辈们所使用的符号规则. 另外，他也知道了符号规则：$a-(-b)=a+b$，a,b为正数，并体现于他的运算中. 对于除法运算，他仅考虑了单项式和单项式以及多项式和单项式相除的情形，而没有给出多项式除法的一般规则，因为这需要符号规则：$-a-(-b)=-(a-b)$. 凯拉吉没有发现这一规则，从而也使得他对多项式的开平方只能考虑正系数的情形. 对于正系数多项式的开平方，他以多项式的标准形式为基础给出了有效的一般方法. 下以多项式

$$x_1^2+2x_1x_2+(x_2^2+2x_1x_3)+2x_2x_3+x_3^2 \qquad (5\text{-}1\text{-}1)$$

为例说明凯拉吉获得开平方法的过程.

凯拉吉首先考虑多项式$(x_1+x_2+x_3)^2$，以二项式定理为基础将其展开，得到多项式(5-1-1). 这是凯拉吉不同于他的前辈们的独到之处，也是他的多项式开方法的基础. 凯拉吉寻求上述多项式的根，并给出了两种方法[①]：第一种，取该多项式两个端项的根的和$(\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_3^2}=x_1+x_3)$，加上第二项除以两倍的第一项根的商$\left(\frac{2x_1x_2}{2\sqrt{x_1^2}}=x_2\right)$或加上第四项除以两倍的最后项根的商$\left(\frac{2x_2x_3}{2\sqrt{x_3^2}}=x_2\right)$，为多项式(5-1-1)的根$(x_1+x_2+x_3)$；第二种，第三项减去 2 倍的第一项和最后项的乘积$(x_2^2+2x_1x_3-2\sqrt{x_1^2}\sqrt{x_3^2}=x_2^2)$，然后取余数的根与两个端项根的和$(\sqrt{x_2^2}+\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_3^2}=x_1+x_2+x_3)$. 凯拉吉的方法并不仅限于一些特殊的例子，而是一种一般的方法. 第三部分，凯拉吉进一步提出了“加、减、乘、除和开方运算怎样才能应用于无理代数量”的问题. 它是凯拉吉整个研究过程中的一个重要阶段，也是代数运算扩张中的一个重要阶段. 他定义了“不可通约量和无理

① R. Rashed, *al-Karaji*, p. 241.

量”,这两个概念和欧几里得《几何原本》中的定义实质上是一致的. 实际上,希腊的几何代数仍是凯拉吉代数扩张的基础. 凯拉吉在其著作《综合算术》中讨论了无理单项式的四则运算以及一些简单多项式的四则运算. 他的这一工作,如果从纯理论的角度考虑,具有重要意义. 它极大地丰富了实数代数结构知识,为代数结构从有理量到无理量的扩张做了最初的尝试. 然而,一方面,由于当时基本的符号运算规则还没有完全建立起来,另一方面,尽管人们基于几何代数的基础上有了无理量的概念(并非现代意义下数学基础中的无理量概念),但没有建立起实数域的概念. 因此,凯拉吉的论述只能是浅显的、最基本的,不可能在更深的层次上进行思考.

5.1.3 多项式理论的进一步发展——萨马瓦尔的工作

萨马瓦尔是继凯拉吉之后又一位对多项式代数做出卓越贡献的阿拉伯数学家. 萨马瓦尔的主要贡献在代数方面. 19 岁完成的著作《眩感》(*al-Bāhir*)成功地发展了他的前辈,特别是凯拉吉的代数成就.《眩感》分为四个部分:第一部分论述了一个未知量的有理系数多项式的运算;第二部分主要处理了二次方程、不定分析与求和法;第三部分讨论了无理量;第四部分是代数规则的应用. 对于代数多项式的论述主要集中在第一部分. 这里,他首次研究了相反数,给出了减法规则:

“如果我们从零幂中减去一个正数($0\cdot x^n-ax^n$),则得到一个相同的负数($-ax^n$);如果从零幂中减去这个负数[$0\cdot x^n-(-ax^n)$],则得到一个相同的正数(ax^n). 如果从一个负数中减去一个正数,则余数为它们的负和[$(-ax^n)-bx^n=-(a+b)x^n$];如果从一个更大的负数[①]中减去一个负数,结果是它们的负差[$-ax^n-(-bx^n)=-(a-b)x^n, a>b>0$];如果被减数小于减数,结果为它们的正差[$-ax^n-(-bx^n)=(b-a)x^n, 0<a<b$].”[②]

萨马瓦尔的这一减法规则在其多项式除法和多项式的开方运算的研究中起了十分重要的作用,是他关于负系数多项式运算的研究获得成功的一个重要环节. 为了使得含有一个未知量的单项式的乘除法运算简洁明了和便于理解,

---

① 这里指系数绝对值更大.

② Adel Anbouba, *al-Samawal*, *Dictionary of Scientific Biography*, New York Scribners, 1970, p. 92.

他首先按单项式次数的升降设计了一张表：

…	4	3	2	1	0	1	2	3	4	…
…	x^4	x^3	x^2	x	1	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$	…

对于两个单项式的乘法、除法运算，利用它们的幂次在表中位置即可确定运算结果．如 $x^5\cdot\frac{1}{x^2}$，在表中 x^5 从单位 1 开始是左边第 6 位，$\frac{1}{x^2}$ 是右边第 3 位，那么两项相除的结果即为从左边第 6 位向右数 3 位（6－3＝3），即 x^3．再如 $x^3\cdot x^2$，在表中，x^3，x^2 分别是左边第 4 位和第 3 位，那么结果为从左边第 4 位向左数 3 位（4＋3－1＝6），或从左边第 3 位向左数 4 位（3＋4－1＝6），即 x^5．一般地，对于 $x^m\cdot x^n$（m，n 为整数），则乘、除法运算的结果的位数计算公式为

$t=|m+n|-1$，当 $m\cdot n>0$ 时；

$t=|m-n|$，当 $m\cdot n<0$ 时．

利用此表和上面的规则，萨马瓦尔给出了多项式的乘法运算以及多项式与单项式的除法运算方法．其实，萨马瓦尔的主要成就在于多项式的除法和开方运算上．他之所以能够获得成功，一方面，大量吸收了前人的研究成果，另一方面与他的卓越才能是分不开的．他给出了减法规则，并认识到凯拉吉由于缺乏表达符号而带来的困难．为此，他设计了一种多项式表示的简单方法，将多项式按降幂形式每一项都在表中设置一个位置，而整个多项式则由其系数表示出来．如，对于 $3x^4+5x^3+18x+6+\frac{21}{x}+\frac{12}{x^2}$，则可表示为

x^4	x^3	x^2	x	1	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$
3	5	0	18	6	21	12

从而解决了复杂计算中各个过程难以记忆的困难．

萨马瓦尔的这种表示方法与中国学者对于方程式的表示方法有些相似，都是在表中为表达式各项设置一个位置，由表达式各项系数表示整个表达式．但由于两者的最终目的不同，表的放置方式亦有所差别．萨马瓦尔给出的表是按多项式次数的横式排列，中国学者给出了多项式的竖式排列．设一般多项式方程为 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$（$a_n<0$），中国学者秦九韶用实 a_n、方 a_{n-1}、上廉 a_{n-2}、二廉 a_{n-3}、…、下廉 a_1、隅 a_n，依升幂形式给出表达式的竖式

排列.发端于12世纪的中国天元术则依次使用…、低、下、地、太、天、上、高、…分别表示…、x^3、x^2、x、c、x^{-1}、x^{-2}、x^{-3}、…,按降幂给出了多项式的竖式排列.①

这里,我们以萨马瓦尔《眩惑》中的例子为例,用现代符号来说明他的多项式除法的过程.如

$$\frac{20x^6+2x^5+58x^4+75x^3+125x^2+96x+94+140x^{-1}+50x^{-2}+90x^{-3}+20x^{-4}}{2x^3+5x+5+10x^{-1}}.$$

他将被除数按上面形式写在 x 幂次下的第二行,而留第一行为商的位置,将除数写在被除数下面,整个过程如下表:

x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	x^{-1}	x^{-2}	x^{-3}	x^{-4}
			10	1	4	10	0	8	2	
20	2	58	75	125	96	94	140	50	90	20
2	0	5	5	10						
	2	8	25	25	96	94	140	50	90	20
	2	0	5	5	10					
		8	20	20	86	94	140	50	90	20
		2	0	5	5	10				
			20	0	66	54	140	50	90	20
			2	0	5	5	10			
					16	4	40	50	90	20
					2	0	5	5	10	
						4	0	10	10	20
						2	0	5	5	10

从而得到两多项式相除的商式为

$$10x^3+x^2+4x+10+8x^{-2}+2x^{-3}.$$

萨马瓦尔用同样的方法求出了多项式 $20x^2+30x$ 除以 $6x^2+12$ 的商

① 最初的天元术"天"在"太"之上,"地"在"太"之下,到了李冶的时代,人们则采用了相反的记法,即文中给的记法.具体参见:《中国数学简史》,山东教育出版社,1986,第309页.

$$3\frac{1}{3}+5\cdot\frac{1}{x}-6\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{10}{x^3}+13\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{20}{x^5}-26\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^6}-\frac{40}{x^7}+\cdots.$$

萨马瓦尔的多项式除法和现在我们使用的长除法有一定的相似之处，二者的思想方法是相同的. 所不同的是萨马瓦尔的除法过程中除数的位置代替了现代长除法中除数和商数乘积的位置，他只以多项式系数来表示多项式，除式和被除式中的未知量均被设置在固定位置上，从而省掉了相除过程中未知量书写的多次重复，使用比较方便，不失为一种较好的方法. 然而，这不能完全归功于萨马瓦尔，他的很多思想来源于凯拉吉. 他充分了解凯拉吉的工作，并对其进行了发展. 凯拉吉已经给出单项式和单项式以及多项式和单项式除法的规则，萨马瓦尔在此基础上进一步考虑多项式之间的除法，即他进一步将除法运算推广到整个多项式环$\left[Q(x),Q\left(\frac{1}{x}\right)\right]$上，从而给出上述的一般方法. 不仅如此，他还给出负系数多项式的开方（凯拉吉仅考虑了正系数的情况）规则. 他考虑了多项式①

$$25x^6+9x^4+84x^2+64+\frac{100}{x^2}+\frac{64}{x^4}-30x^5-40x^3-116x-\frac{48}{x}-\frac{96}{x^3} \quad (5\text{-}1\text{-}2)$$

的开平方根问题. 设多项式(5-1-2)为 $f(x)$，萨马瓦尔将它变形为

$$\begin{aligned}f(x)=&25x^6+(10x^3-3x^2)(-3x^2)+(10x^3-6x^2-4)(-4)\\&+\left(10x^3-6x^2-8-\frac{6}{x}\right)\left(\frac{6}{x}\right)+\left(10x^3-6x^2-8+\frac{12}{x}-\frac{8}{x^2}\right)\left(-\frac{8}{x^2}\right),\end{aligned}$$

继而得到

$$f(x)=\left(5x^3-3x^2-4+\frac{6}{x}-\frac{8}{x^2}\right)^2.$$

凯拉吉已将多项式 $g(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2$ 展开为标准形式(5-1-1)式，它可适当变形为

$$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+(2x_1+x_2)x_2+(2x_1+2x_2+x_3)x_3.$$

这与萨马瓦尔的多项式 $f(x)$ 变形后的形式是相同的. 由萨马瓦尔给出的上述变形过程可知，他已对凯拉吉的三项式展开作了进一步推广，即

$$\begin{aligned}G(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\\&=x_1^2+(2x_1+x_2)x_2+\cdots+(2x_1+2x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n)x_n.\end{aligned}$$

---

① R. Rashed, *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*, Translated by A. F. W. Armstrong, Kluwer Academic Publishers, 1994, p. 38.

这正是他有理系数多项式开平方的基本思想.

可以看出,无论是凯拉吉的还是萨马瓦尔的代数多项式的开方法,二项式定理及其推广形式都是思想基础.设法将多项式写成完全平方形式是他们的目标,这种思想也许可以追溯到很早的二次方程的配方法.事实上,他们正是利用上述多项式的开方法解决了某些特殊方程的求解问题.

总的来说,阿拉伯学者的多项式理论仅涉及到多项式的一些基本运算,即加、减、乘、除和开方,是该理论中的一些最基本的知识.他们没有给出系统完整的这一领域所必须的基本概念,也没有在更高的层次上进一步深入研究.当然,当时有诸多条件限制.首先,虽然人们已经接受无理量,但它并非现代意义下的无理量,实数域的概念尚未完全建立起来;其次,虽然学者们对代数结构中代数运算由有理量到无理量的扩张作了一些尝试,但仍未摆脱希腊几何代数的束缚;另外,符号的缺乏也为阿拉伯学者的研究带来了极大的困难;等等.考虑到这些因素,我们说阿拉伯学者在这一领域的成就是突出的.从比较的角度分析,虽然希腊的几何代数、印度以及中国的代数学中也涉及一些多项式理论的最基本东西,但均未作为一个专门的课题加以研究.阿拉伯学者则不同,他们不但对其进行了专门的论述,而且所取得的成就已远远超出同时期或之前的其他国家.总之,在多项式理论方面,阿拉伯学者走在同时期或之前的其他国家的前面,是现代多项式理论的先驱者.

§5.2 二项式定理的比较研究

二项式定理的早期发展与方程的求解和开高次方根有着密切的联系,是随着方程理论和开高次方根的发展而逐渐建立并进一步得到发展的.古代数学家们建立、发展了二项式定理,并将它应用于数学的多个方面,如方程理论、开高次方根、多项式理论以及级数理论等许多领域,从而使得二项式定理更加完善.本节着重考查二项式定理在阿拉伯国家不同时代的发展,特别是二项式展开或帕斯卡三角在开方和方程理论中的作用,比较不同时代帕斯卡三角的发生和存在形式.另外也将其与同时代的中国和印度的情况作了比较,以便探讨阿拉伯学者这一成就的思想源泉.同时还叙述了它在欧洲及其他地区的发展情况.

5.2.1 二项式定理的早期形式

正整数幂的二项式展开形式为

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n,$$

其中 C_n^k 为从 n 个元素中每次取出 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个元素的组合数，称为二项式系数. 最简单的形式即为 $n=2$ 的情形，也就是

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

它早为人们所熟知. 实际上，古巴比伦、古希腊、印度以及古代中国的方程理论中都有这种简单形式的二项式展开的应用. 古代二次方程的解法——配方法就是二项式展开 $n=2$ 时的具体应用，后又被阿拉伯学者所接受. 另外，中国早期的“开方术”还利用了 $n=3$ 的情形.《九章算术》中“开立方术”①，其算法大致可分为以下三步：

(1) 对方程作倍根变换，估计方根的第一次近似值；

(2) 利用每次逼近值将原方程作减根变换；

(3) 以一次项系数除常数项，求方根的下一次近似值.

其中第二步的依据为公式

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

事实上，如设 $x^3=N$，第一次近似值为 a，令 $x=a+y$ 对原方程作减根变换，则得减根方程

$$y^3+3ay^2+3a^2y+a^3=N,$$

也就是 $y^3+3ay^2+3a^2y=N-a^3$.“开立方术”中减根变换后的调整变换即是将减根方程化为上述形式. 印度的开方运算也同样用到 $n=2,3$ 的二项式展开. 在开方和方程理论的早期，人们已经认识到上述简单形式的二项式定理，但只是在开方和方程求解中运用，并未以明确的形式提出.

5.2.2 二项式定理在阿拉伯的建立

数学史家拉塞德(R. Rashed)认为，萨马瓦尔的著作《眩惑》是第一部已知的论述二项式定理的著作.②而在此著作中萨马瓦尔转述了凯拉吉的著作《发赫

---

① 钱宝琮:《算经十书》(上)，北京，中华书局，1963，第163—164页.

② Mohammad Yadegari, “The Binomal Theorem: A Widespread Concept in Medieval Islamic Mathematics”, *Historia Mathematica*, 7(1980), p. 401.

里》中有关二项式定理的工作．据萨马瓦尔的转述，凯拉吉给出了$(a+b)^3$、$(a+b)^4$以及$(a-b)^3$的展开式．如对于$(a+b)^4$，萨马瓦尔叙述到："任意数分为两个部分，它的平方—平方等于它的每个部分的平方一平方，4倍的每个部分立方的乘积，两个部分中每部分平方的乘积的6倍．"①也就是

$$(a+b)^4=a^4+b^4+4a^3b+4ab^3+6a^2b^2=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

且萨马瓦尔给出了每个展开式的证明．他首先给出了一些基本规则，如

$$(ab)(cd)=(ac)(bd),\ (a+b)c=ac+bc,$$

然后基于已知的展开式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，利用归纳法顺理成章地完成了证明．若以现代符号表示则其过程如下：

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)\\&=a^2(a+b)+2ab(a+b)+b^2(a+b)\\&=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^4&=(a+b)(a+b)^3\\&=(a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\\&=a(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+b(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\\&=a^4+b^4+4ab^3+4a^3b+6a^2b^2.\end{aligned}$$

萨马瓦尔将凯拉吉的工作进一步推广到$n=5$的情形．他说："它的平方—立方等于它的每部分平方—立方的和，5倍的每部分和另一部分平方一平方的积，以及10倍的每部分平方和另一部分立方的积．"②也就是

$$(a+b)^5=a^5+b^5+5ab^4+5a^4b+10a^2b^3+10a^3b^2.$$

另外，萨马瓦尔的《眩惑》中还载有凯拉吉的另一长篇论文中的二项式系数表，以及二项式系数的构造定律

$$C_n^i=C_{n-1}^{i-1}+C_{n-1}^i$$

和对于整数n的二项式展开

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i.$$

这里，萨马瓦尔以自己的语言详细地叙述了凯拉吉的系数表，即现在所谓的帕斯卡三角的构造．他说："对于分为两部分的任何一个数，为了掌握那些次数相

① R. Rashed, *The development*, p. 65.

② R. Rashed, *The development*, p. 65.

互做乘法运算的必须的次数，现在让我们回顾一个规则. 凯拉吉说，为了能够继续下去，必须在表中放置一个'1'，并且在它的下面再放置一个'1'，把第一个'1'移到另一列，把第一个'1'加到它下面的'1'上，这样我们得到'2'，把它放在被转移的'1'下面；然后把第二个'1'放在'2'下. 因此我们得到'1,2,1'. 这表明对于由两个部分组成的每一个数，如果以它的每一部分自乘一次（因为两端项是'1'和'1'），两次的一部分乘以另一部分（因为中间项系数是 2），那么我们就得到了这个数的平方. 然后，移动第二列中的'1'进入另一列，第二列中的'1'加上它下面的'2'，将得到的'3'记在第三列'1'的下面，第二列的'2'加上它下面的'1'，我们得到'3'，将它写在上一个'3'的下面，并在这个'3'的下面写上'1'，这样得到第三列的数'1,3,3,1'. 这告诉我们由两部分组成的任何一个数的立方等于它的每部分的立方，和 3 倍的每一部分与另一部分平方的乘积之和. ……这样我们就能找到平方、立方直到所要求的幂的数目."①若以现代符号表示，则表的形式如下：

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
		1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
			1	5	15	35	70	126	210	330	495
				1	6	21	56	126	252	462	792
					1	7	28	84	210	462	924
						1	8	36	120	330	792
							1	9	45	165	495
								1	10	55	220
									1	11	66
										1	12
											1

① R. Rashed, *The development*, pp. 66—67.

由萨马瓦尔的转述，我们知道，在萨马瓦尔之前，可以追溯到凯拉吉的时代，甚至更早，阿拉伯学者就已经清楚所谓的帕斯卡三角的构造和内部结构. 实际上，那时的所谓“系数三角形”只是对于较低次幂而言. 阿拉伯学者们所了解的也只是这些特殊的“系数三角形”的内部结构，还没有上升到一般的情形. 从萨马瓦尔的叙述来看，这种表似乎可以一直构造下去，他将凯拉吉的展开式推广到 $n=12$ 的情形. 另外我们知道，萨马瓦尔之前的阿拉伯开方法都利用了 $n=2$，$n=3$ 等的二项式展开，且在开方过程的布式中，被开方数以及各未知数的系数也是竖式排列，与萨马瓦尔“系数三角形”的排列吻合，只是开方过程的布式中最下面缺少了一行“1”，也就是方程的首项系数. 因此我们可以认为，从阿拉伯早期开方过程的布式到萨马瓦尔的二项式展开系数表是合理的、一脉相承的. 对于这一点，萨马瓦尔 1172 年的论文首先为我们提供了有力的证据. 这篇论文中，萨马瓦尔讨论了一个数的开 5 次方问题. ①他得到根的第一位数字 n_1 后，并未详细描述下面的调整变换过程，只是简洁地说：“一旦完成 14 次运算，就完成了必须记录在表中的四行的计算”. ②随后提供了一张表(参见第四章，§4.1，表Ⅲ)，并说明了该表的构造方法. 明显地此表中的各项系数排列为

1	1	1	1	1
2	3	4	5	
3	6	10		
4	10			
5				

与其《眩惑》中给出的系数三角形相比，缺少了一行“1”的排列. 萨马瓦尔并不是为了得到二项式系数而给出上表，他的目的在于计算 $C_5^i n_1^i$ $(i=1,2,\cdots,5)$ 的值，也就是减根方程的各项系数和常数项. 上表的构造除额外增加了一个因子 n_1 外，形式与系数三角形几乎相同. 其次，早期的开方法和系数三角形为此奠定了基础. 在大约一个半世纪之前，尤克里迪希曾给出了开平方和开立方的方法，随后库斯耶尔描述了自己的开方法；同时代的阿布·瓦法也曾写过一本书，书名即暗示当时已有开三次方、四次方和五次方根的知识③；比鲁尼也在一篇论文

① R. Rashed, *The development*. pp. 91—101.

② R. Rashed, *The development*, p. 94.

③ 李约瑟：《中国科学技术史》(三)，北京，科学出版社，1978，第 303 页.

《开立方或更高次方》中论述了开方法. 后来，海亚姆也给出了高于 4 次的开方法，并称他发现了二项式$(a+b)^n$ 展开的规律，且把资料加以系统化. 由于有了早期的系数三角形和前辈们的开方法，萨马瓦尔给出开 5 次方以至于调整变换的一句话说明和附表的构造，我们也就可以欣然接受了. 另外，萨马瓦尔很清楚凯拉吉三次和四次的二项式系数，加以对前辈们开方资料的总结，而给出系数三角形的构造方法也是顺理成章之事.

5.2.3 二项式定理在阿拉伯的发展

继萨马瓦尔之后，不少阿拉伯学者对二项式定理进行了研究. 13 世纪的赞佳尼(al-Zanjāni，? —1262)受凯拉吉的影响，在其著作《代数学中方程的平衡》(*Qustās al-Mū'adala fī'Ilm al-Jabr wa al-Muqābala*)一书中给出了直到 7 次幂的二项式展开. 如对于 $n=7$ 时的$(a+b)^n$ 展开，赞佳尼说："和的 7 次幂等于每一项的 7 次幂加上 7 倍的每一项与另一项 6 次幂的乘积，加上 21 倍的每一项平方与另一项 5 次幂的乘积，加上 35 倍的每一项立方与另一项 4 次幂的乘积."[①]以现代符号写出即为

$$(a+b)^7=a^7+b^7+7ab^6+7a^6b+21a^2b^5+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4.$$

赞佳尼并未局限于二项式的情形，他还讨论了三项式、四项式或更多项式等一般多项式，并将它们看做是二项式的特殊情况. 如对于三项式，他写道："如果你要发现三项式的立方(展开式)，你可以将其中的两项合为一项，即组合前两项使其自乘为三次方，第三项也自乘为三次方，3 倍的前两项和的平方乘以第三项，然后 3 倍的前两项和乘以第 3 项的平方，(所有这些乘积项的)和就是原来三项式的最终结果. 对于其他的幂均可效仿这个过程."[②]也就是说，对于三项式的 n 次幂有

$$(a+b+d)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(a+b)^{n-i}d^i=\sum_{i=0}^{n}C_n^i d^i\Big(\sum_{j=0}^{n-i}C_{n-i}^j a^{n-i-j}b^j\Big).$$

事实上，凯拉吉和萨马瓦尔对于 $n=2$ 的情形已将二项式定理推广到三项式. 赞佳尼讨论二项式的目的在于利用它进行代数多项式的开方，这正是凯拉吉最初描述并由萨马瓦尔进一步发展的一种方法. 然而，赞佳尼未给出算术三角形. 同时代的纳西尔丁受海亚姆的影响，给出直到 $n=12$ 时$(a+b)^n$ 的展开式. 另外，

---

① Mohammad Yadegari, *The Binomal Theorem*, p. 404.

② Mohammad Yadegari, *The Binomal Theorem*, p. 404.

伊本·巴纳(Ibn al-Bannā, c. 1251—1321)和伊本·祖拉科(Ibn Zurayq, 14世纪)也讨论了二项式定理. 稍后,卡西在其著作《算术钥》中描述了算术三角形的构造方法[①],给出直至 $n=9$ 时的算术三角形. 在开高次方根的过程中,卡西利用二项式定理计算了

$$(n+1)^k-n^k=C_k^1n^{k-1}+C_k^2n^{k-2}+\cdots+1$$

的值.

对于后期阿拉伯的二项式定理,我们可以得出如下结论:12世纪之后的阿拉伯学者的二项式定理的研究工作大都受到前期学者的成就的影响. 他们的工作一方面将前辈们在正整数范围内的二项式展开继承下来,另一方面将二项式展开推广到多项式的展开. 除此之外,并未取得实质性进展.

5.2.4 同时期中国和印度的工作

据印度数学史家巴格(A. K. Bag)的论述,约公元前200年,印度的韵律学者平盖拉(Pingala)在其著作《昌达苏多罗》(*Chandahsūtra*)中就有关于二项式系数的描述. 哈拉尤达(Halāyudha, 10—11世纪)在其对平盖拉著作的评注中则给出了二项式 $(a+b)^1$、$(a+b)^2$、$(a+b)^3$、…展开式系数的构造方法(即算术三角形的构造方法).

事实上,哈拉尤达的评注的确给出了金字塔形状的图表(图5-2),并描述了此图的构造方法. 然而,只就平盖拉的论述和哈拉尤达的注文并不能充分说明当时的印度学者已经发现了算术三角形,因为早期的平盖拉的描述仅仅是针对诗的组合韵律(长音、短音)而言,与二项式系数毫无关系. 哈拉尤达的评注也是在平盖拉工作的基础上对诗的韵律组合的进一步发展. 他明确指出他的三角形的各行是分别对于各个不同音节的韵律组合而言,并没有涉及二项式的内容. 因此,巴格关于印度早期已有算术三角形的说法值得进一步商榷.

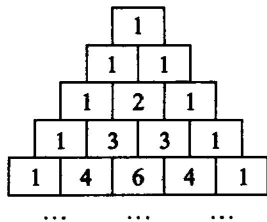


图 5-2

中国古代对于算术三角形的记载(现存文献)见于杨辉(13世纪)的著作《详

① J. L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, 1986, pp. 57—63.

解九章算法》(1261 年),书中给出如下的“开方作法本源图”:

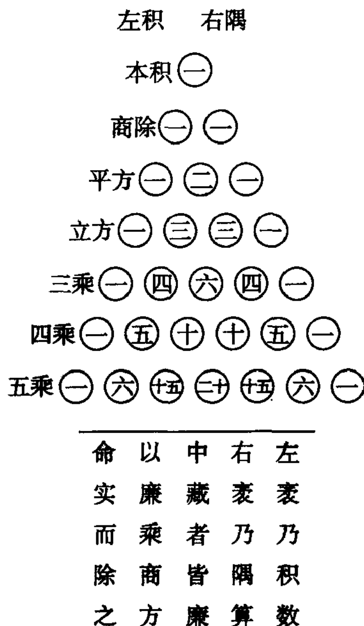


图 5-3

且杨辉指出此图系“出释锁算书,贾宪用此术”. 也就是说,中国至迟在贾宪(约 11 世纪)[①]时就已经有了由 0 次到 6 次的二项式展开式的全部系数. 图下面的注释,前两句是说最外边左、右两条斜线上的数字分别是各次开方的积的系数和隅算(x^n)的系数,“中藏者皆廉”是说中间各行的数字分别是开各次幂的廉,后两句是说明开方的步骤. 另据钱宝琮先生考证:“贾宪的‘立成释锁’可以解释作:利用一种表格的数字来解决一般的开方问题. 这种数字表格很可能就是他提出的指数为正整数的二项式定理系数表——开方作法本源图.”[②]贾宪给出的算术三角形与其开方法有着密切的联系这是无可置疑的,图后的“增乘方求廉法草”给出了各廉的计算方法:“列所平方数[如前,五乘方列五位,隅算在外]以隅算一自下增入前位,至首位而止[首位得六,第二位得五,第三位得四,第四位得三,下位得

① A. K. Bag 在其著作 *Mathematics in Ancient and Medieval India* 第 192 页指出中国出现算术三角形是在朱世杰的《四元玉鉴》中,从而说明晚于印度,这是不正确的.

② 钱宝琮:《科学史论文集》,北京,科学出版社,1983,第 406 页.

二],复以隅算如前升增,递低一位求之."①并给出开 5 乘方各廉的具体求法,以现代形式将其草写出即为

1 6(1+5)止	6	6	6	6
1 5(1+4)	15(10+5)止	15	15	15
1 4(1+3)	10(6+4)	20(10+10)止	20	20
1 3(1+2)	6(3+3)	10(4+6)	15(5+10)止	15
1 2(1+1)	3(1+2)	4(1+3)	5(1+4)	6(1+5)止
1 1	1	1	1	1

明显地,这与开方的调整变换过程是相同的.同样的方法可以推广至求开任意次方的廉.

5.2.5 阿拉伯和中国早期系数三角形的比较

对比阿拉伯和中国早期系数三角形,可以发现以下不同之处:

(1) 两种表格的构成方法不同.萨马瓦尔是以较低次幂二项式展开为基础,由低到高逐渐推进,而中国学者则是从开方运算推求个廉中获得的.

(2) 阶数和放置方式不同.贾宪的"开方作法本源图"给出 0—6 次二项式展开的全部系数,萨马瓦尔的系数表则给出 0—12 次的二项式展开的全部系数.两种表格的放置方式不同,这由前面给出的表格来看是显然的.

但二者也存着诸多相同点:

(1) 两种表格数字的排列方式是完全相同的.贾宪图中的数是数字形式给出,从朱世杰的"古法七方图"可以看出,其算筹数字是横式排列②,然而,中国古代的算筹个位数字规定为竖式排列,因此,三角形的底边起初可能是竖立在左边的(中国古代书写方式由右到左),这样萨马瓦尔的系数表虽然阶数和中国不同,但数字排列完全相同.

(2) 附表的构造过程和贾宪"增乘方求廉法"过程是相同的.如果我们将求廉法草中递次增入的"隅算"改为以商数乘"隅算",则结果与附表完全吻合.

(3) 产生时间几乎为同一时期.这一点前面的介绍已经很清楚.

中国的"开方作法本源图"来自中国的"开方术"是确信无疑的,阿拉伯的二

---

① 钱宝琮:《中国数学史》,北京,科学出版社,1982,第 151—152 页.

② 钱宝琮:《中国数学史》,第 151 页.

项式系数三角形与其早期的开方之间的一脉相承也似乎完全合理,只不过阿拉伯人和中国人获得表的方式有些差异而已.因此,我们可以得出如下结论:阿拉伯人和中国人各自独立地发现了系数三角形.

5.2.6 二项式定理在欧洲的发展

13世纪,欧洲也出现了算术三角形,约丹努斯(Jordanus de Nemore,?—1236)的《算术》(*De Arithmetica*,c. 1220)给出的算术三角形的构造方法[1],和萨马瓦尔的有关叙述非常相似,但在时间上却比阿拉伯和中国晚了大约一个半世纪.约丹努斯构造此算术三角形的目的是利用它给出连比项构造的一般规则,并考虑寻找超特殊数的方法.继约丹努斯之后,阿皮努斯(Petrus Apianus,1495—1552)、施蒂费尔(M. Stifel,c. 1487—1567)、塔尔塔利亚(N. Tartaglia,1499—1557)、卡尔达诺(G. Cardano,1501—1576)以及邦别利(R. Bombelli,c. 1526—1572)等都曾研究过这一问题,但他们的论述并未引起广泛的注意.17世纪,帕斯卡(Blaise Pascal,1623—1662)的论文《论算术三角形以及另外一些类似的小问题》(*Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*)专门论述了这种三角形,并称之为"算术三角形".此后算术三角形广为流传,并被西方人称为"帕斯卡三角形".事实上,这已比凯拉吉和中国贾宪晚了6个多世纪.上述所有数学家的讨论都仅限于n为正整数时的二项式定理的情形,对于固定的n,展开项是有限的.而真正实现从有限到无限突破的却是牛顿(Isaac Newton,1642—1727).1664—1665年他发现了二项式定理,1676年在两封信中正式公布了这一成果

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-1}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+\cdots,$$

并指出"此处$P+PQ$表示要求其根或任意次幂的根的量,P表示该量的首项,Q则是首项相除后的余项,$\frac{m}{n}$是$P+PQ$的幂指数,不论其是整数还是分数,正数还是负数"[2].这里,牛顿将幂指数推广到任意有理数,使得二项式定理的应用范围更为广泛.

---

[1] Barnabas Hughes, "The Arithmetical Triangle of Jordanus de Nemore", *Historia Mathematica*, 16(1989), pp. 213—223.

[2] 吴文俊:《世界著名科学家传记·数学卷》(Ⅲ),科学出版社,1992,第232—236页.

第六章 阿拉伯的方程论

阿拉伯在代数方程上的成就是其最具有影响性的工作之一，也是其数学上的最突出贡献之一. 现在我们所谓的“代数学”(algebra)一词即是来自花拉子米的著作《还原与对消的科学》(简称《代数学》，*Ilm al-Jabr wa'l Muqabalah*). 其中“al-jabr”意为“还原”，即是把负项从方程的一端移到另一端，还原为正项；“muqabalah”意为“对消”或“化简”，即方程两端消去相同的项或合并同类项；“algebra”一词通常认为由“al-jabr”演变而来.

花拉子米依其系数将二次方程分为 5 种类型，即

(1) “平方”等于“根”，即 $ax^2=bx$；

(2) “平方”等于“数”，即 $ax^2=c$；

(3) “平方”和“根”等于“数”，即 $ax^2+bx=c$；

(4) “平方”和“数”等于“根”，即 $ax^2+c=bx$；

(5) “根”和“数”等于“平方”，即 $bx+c=ax^2$，

其中 a,b,c 均为正数. 并就每一种情形给出了具体的代数解法. 如对一般情形 $ax^2+bx+c=0$，花拉子米的解法即相当于给出了求根公式

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}\text{（仅取方程的正根）},$$

且讨论了方程的判别式条件. ①通过花拉子米、泰比特、阿布·卡米尔以及奥马·海亚姆等的工作(特别是花拉子米的工作)，二次方程理论已经非常成熟地展示给人们. 一方面，它给出了一般二次方程的系统解法；另一方面，为人们提供了规范的方程术语“移项”、“合并同类项”等. 阿拉伯学者不但给出了二次方程的代数解法，而且还提供了代数方法的几何解释. 对于三次方程，阿拉伯学者通常认为不能代数求解，他们继承希腊的思想，给出一般三次方程的几何解法(圆锥曲线或圆相交的方法). 对于二次方程的代数解法，数学史工作者们已做

---

① L. C. Karpinski and Robert's Latin translation of *Algebra of al-Khowarīsimī*, New York, 1915, pp. 71—73.

了较多的研究，这里作者不拟赘述. 本章将主要从比较的角度探讨阿拉伯代数方程求解的几何方法以及沙拉夫丁·图西三次方程正根的讨论两个方面的问题.

§6.1 阿拉伯代数方程求解几何方法的比较研究

阿拉伯数学最突出的成就之一是代数方程的求解. 研究表明，中世纪阿拉伯学者关于代数方程的工作，与几何方法有着密切的联系，虽然对于二次方程和三次方程这两种情形，几何方法扮演的角色有所不同. 本章从比较史的角度，阐明阿拉伯代数方程求解中的几何方法，并分析其思想来源及影响.

6.1.1 比较背景

巴比伦的代数算法

求解代数方程的问题可以追溯到很古老的年代. 古巴比伦学者已能求解二次方程，他们的做法是一步一步列出求根的算法，对这些算法的来源则没有解释说明. 巴比伦代数与几何之间也存在着联系，但这种联系主要表现在许多代数方程出自几何问题，巴比伦人因而在处理代数方程时广泛地使用几何语言(如称未知量为“长”、“宽”或“高”等)，且在数与几何量之间不作明确区分. 然而没有任何根据可以说明巴比伦求解代数方程的算法本身依赖于几何方法. 巴比伦的代数可以说是算法化的代数，古代埃及人同样如此.

希腊几何代数

重视逻辑推理的古希腊学者没有继承巴比伦人的算法化代数. 希腊人的代数是所谓几何代数，即隐含于几何学中的代数. 这种几何代数的主要特征可概括如下：

(i) 代数方程问题及其求解以几何的形式表述，并未涉及任何代数的形式，也就是说是用纯几何的方法求解实质上相当于代数方程的几何问题.

(ii) 不同于巴比伦人，希腊人在数与几何量之间作了明确的区分. 他们以线段来表示数(希腊人意识中的数仅为有理数)，但在运算过程中，参与加、减运算的各量的维数必须保持一致，同一个运算式或同一个等式中，不可以出现线段加上或减去或等于面积、体积等情形. 他们以自己的方式规定了数的运算和

几何量的运算.①

早在公元前350年左右，梅内科姆斯(Menechmus，c. 375—c. 325 B. C.)就已经用这种几何代数解决了相当于三次方程 $x^3=k$ 的几何问题，那时是隐于倍立方问题之中的.而梅内科姆斯利用圆锥曲线 $y^2=sx$ 和 $xy=2s^2$ 相交的方法解决了倍立方问题.②

希腊几何代数最具代表性的例子包含于欧几里得的《几何原本》之中.《几何原本》提供了多种形式的二次方程的几何解法.如第Ⅱ部分命题11:“分割一条已知线段，使其与其中一条小线段构成的矩形等于以另一条线段为边的正方形.”③若设原线段长为 a，分割后较大线段的长度为 x，则该问题即相当于解二次方程

$$a(a-x)=x^2,$$

即 $x^2+ax=a^2$.其解法为:如图6-1，在 $AB(=a)$ 上作正方形 $ABCD$，取 AD 的中点 E，连结 BE，延长 DA 至 F，使得 $EF=BE$.在 AF 上作正方形 $AFGH$，H 位于 AB 上，则 H 即为所求分点.欧几里得随后利用“面积贴合法”对该解法进行了证明.

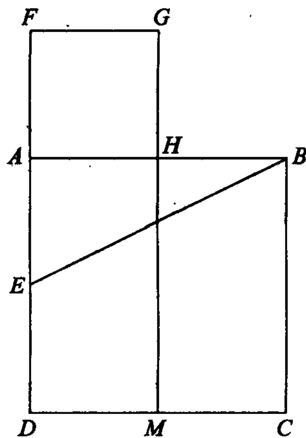


图6-1

事实上，若将上述解法以代数形式表示出来，即为：$S_{正方形ABCD}=a^2$，$AE=\frac{a}{2}$，$EF=BE=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$，则

$$x=AH=AF=EF-AE=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2},$$

即是方程 $x^2+ax=a^2$ 的正根求根公式.

《几何原本》第Ⅵ部分命题28和29等还分别相当于以几何形式解出了形如 $x^2+b=ax$ 和 $x^2+ax=b$ 的二次方程.另外，第Ⅵ部分命题27中，若取平行四边形为矩形，则相当于以几何形式讨论了二次方程 $x^2+s=bx$ 的判别式条件.④

---

① M.克莱因:《古今数学思想》(一)，上海科学技术出版社，1979，第74页.

② H.伊夫斯著，欧阳降译:《数学史概论》，山西经济出版社，1993，第96页.

③ 欧几里得著，兰纪正、朱恩宽译:《几何原本》，陕西科学技术出版社，1990，第62页.

④ M.克莱因:《古今数学思想》(一)，第86页.

据欧托修斯的评注,阿基米德在其著作《论球与圆柱》中曾涉及三次方程.第二篇的问题4:用平面割球为两块,使其体积之比等于给定比.[①]实际上,阿基米德导出了方程

$$\frac{4c^2}{x^2}=\frac{(m+n)(3c-x)}{mc}.$$

这里 $m:n$ 为球体两部分的给定比.阿基米德首先通过变换将方程化为 $x^2(b-x)=a^2d$,然后利用抛物线 $bx^2=a^2y$ 和双曲线 $y(b-x)=bd$ 相交的方法求得三次方程的正根.

总之,希腊几何代数是纯粹几何形式的,它并没有给出任何方程的代数表达式,方程隐含于特定的几何问题之中,其代数意义是后人通过考察而揭示的.尽管如此,希腊几何代数对于代数方程求解中几何技巧的运用具有历史意义.如下文所述,它是中世纪阿拉伯学者在三次代数方程方面的工作的主要思想来源.

古代中国代数方程算法及其几何证明

中国古代解代数方程使用的是适合于中国筹算的数值解法,即开方、开带从方以及后来以"增乘开方法"为主导的"正负开方术"(统称为"开方术"),没有给出精确求根公式.但对于低次方程,当求得的方程的根为精确值时,中国的数值解法和求根公式实质上是一致的.《九章算术》"少广章"给出了开平方和开立方的完整程序,而刘徽在《九章注》中则给出了开平方的几何意义的解释."开方,求方幂之一面也,言百之面十也,言万之面百也,先得黄甲之面,上下相命,是自乘而除也,豫张两面朱幂定袤,以待复除,故曰定法."[②]如图6-2,如设 $N=(a+b+c+\cdots)^2$,则 N 开平方的几何意义即为求面积为 N 的正方形的边长.求得第一位数字 a 后,先将 a^2 减去,即将图中黄甲剖去,再豫张 $2a$,以求第二位数 b.议得 b 后,将 $(2a+b)b$ 减去,即将图中两朱幂和黄乙剖去;然后再豫张 $2(a+b)$ 以求第三位数 c,依次类推.这一方法的根据是"出入相补原理".同样,依据"出入相补原理"可以解释"带从开方法"解二次方程 $x^2+px=q$,实质上就是求面积为 q 的矩形的一条边长.与开平方的几何解释所不同的是,在每次求得一位数字之后,多减去一个以 p 为一边的矩形面积.如图6-3.

① C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, New York, 1968, p. 62.

② 钱宝琮校点:《算经十书》(上),北京,中华书局,1963.

黄甲 a^2	朱 ab
朱 ab	黄乙 b^2

图 6-2

pa	a^2	pb
pb	ab	b^2

图 6-3

将平面的情形推广到立体，相似的方法又可以解释开立方与开带从立方.①

中国古代学者对方程求解算法的几何解释，在代数方程求解的历史发展中具有重要地位. 如下文将要说明的那样，从中世纪阿拉伯学者的二次方程到文艺复兴意大利数学家的三、四次方程求解，其中几何方法的运用，至少在形式上与之相承. 虽然中国数学家构造的是数值求解算法，但他们证明这些算法的几何思路与原理(特别是出入相补原理)却具有普遍意义.

6.1.2 阿拉伯代数方程求解的几何方法

早期的阿拉伯学者(如花拉子米、阿布·卡米尔、泰比特等)似乎接受了巴比伦的传统，他们时常把数等同于几何量，线段和平面等在运算中也未作严格的区分. 然而，几何方法在代数方程求解中的运用在阿拉伯学者那里得到了进一步的发展，这种发展是循着两个不同的方向进行的，即：(i) 系统地给出二次方程代数解法的几何证明；(ii) 创造性地利用几何方法(二次曲线相交的方法)解出一般三次方程.

二次方程代数解法的几何证明

对一般二次方程作系统论述的第一位阿拉伯学者就是花拉子米. 流传下来的花拉子米的传记材料很少，一般认为他出生于花拉子模. 花拉子米是拜火教徒的后裔，早年在家乡接受初等教育，后到中亚细亚古城默夫继续深造，还曾到阿富汗和印度等地游学，不久成为远近闻名的科学家. 公元 813 年，花拉子米应邀到阿拔斯王朝的首都巴格达工作. 830 年，阿拔斯王朝的国王马蒙(al-Ma' mūn,

① 郭书春对此有详细的解释，请参见郭书春:《中国古代数学》，山东教育出版社，1991，第 98—101 页.

786—833)创办了著名的“智慧馆”(Bayt al-Hikmah，是自公元前3世纪亚历山大博物馆之后最重要的学术机构)，花拉子米是智慧馆学术工作的主要领导人之一. 马蒙去世后，花拉子米仍留在巴格达工作，直至去世. 花拉子米生活和工作的时期，是阿拉伯帝国政局稳定、经济发展、文化繁荣的时期.

花拉子米科学研究的范围十分广泛，包括数学、天文学、历史学和地理学等许多领域. 他一生撰写了许多重要的科学著作. 在代数学方面，花拉子米著有《代数学》和《印度的计算术》两部著作，它们对阿拉伯和欧洲数学的发展都产生了非常广泛、重要的影响. 他在天文学、地理学和历史学等方面也有重要贡献，他的《地球景象书》、《历史书》等多部天文学著作都为这些学科的发展起到一定作用.

花拉子米依方程系数和常数项的正负，将一、二次方程分为6类，即：(1) $x=a$；(2) $x^2=a$；(3) $x^2=ax$；(4) $x^2+ax=b$；(5) $x^2+b=ax$；(6) $x^2=ax+b$. 每一类都给出具体的代数解法，对第(5)种情形讨论了方程有实根(两相等或不等实根)和无实根的条件，并结合实例给出了后三种方程解法的几何证明. 以下首先以方程 $x^2+10x=39$ 为例[①]，大致说明其证明的过程.

首先，构造出表示方程的几何图形. 构造正方形 $ABCD$，其边长为 x，则面积为 x^2. 在正方形 $ABCD$ 的每边上分别构造矩形，矩形一边为正方形边长 x，另一边为 $2\frac{1}{2}$，如图6-4，则此时整个图形(不包括四个角的小正方形)的面积为 $x^2+10x=39$.

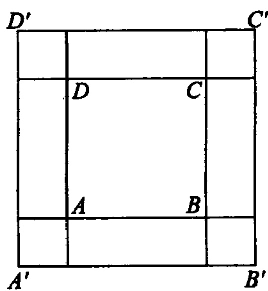


图 6-4

其次，构造出表示 $\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$(对于 $x^2+bx=c$ 和 $x^2=bx+c$)或 $\left(\frac{b}{2}\right)^2-c$(对于 $x^2+c=bx$)或者是与之等价形式的几何图形. 复原上述所作图形为正方形 $A'B'C'D'$，四个角处的小正方形的面积均为 $2\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{2}=6\frac{1}{4}$，故正方形 $A'B'C'D'$ 的面积为 $4\cdot 6\frac{1}{4}+39=64$.

① L. C. Karpinski and Robert of Chester's Latin translation of *al-Khowārizmī*, New York, 1915, p. 77.

最后，利用已知的和可以推知的关系求解. $A'B'=\sqrt{64}=8$，所以 $x=AB=A'B'-2\cdot 2\frac{1}{2}=3$.

花拉子米的这种几何方法表面上似乎类似于希腊的“面积贴合法”，其实不然. 这里，我们要分析“面积贴合法”与“出入相补原理”的异同. “面积贴合法”通常地可以理解为：为了问题的解决，依据题设条件，构造一特殊形状的图形贴合于已知线段，并根据图形的面积关系及其他辅助方法最终推导出所要结论. “出入相补原理”就平面的情形而言即为：一个平面图形从一处移置他处，面积不变，又若把图形分割为若干块，那么各部分面积的和等于原来图形的面积，因而图形移置前后诸面积间的和、差有简单的相等关系. ①二者都涉及平面图形的面积，都是利用面积关系得到结论，但二者有明显的差别：首先，前者图形的构造往往具有一定的特殊性，后者平面图形的分割及移置原则上是任意的，不受条件的限制；其次，前者构造图形的出现原则上不要求重复性，后者相同的图形往往依需要多处出现；另外，前者图形的面积关系常依靠其他条件推导而来，后者则具有简单的相等关系，无需经过繁复的逻辑推导，直观性较强. 花拉子米的上述证明中，正方形 $ABCD$ 边上矩形的构造和角上小正方形的构造在实质上更类似于中国的“出入相补原理”，特别与刘徽的思想和赵爽《勾股圆方图注》等所体现的方法相似. 一者，相同的矩形和小正方形在图形中多处出现，实为一个矩形和小正方形在不同位置的移置；再者，面积间的关系简单直观. 花拉子米对另外两种情形二次方程的几何证明同样具有这些特点.

方程 $x^2+21=10x$. 他设 $S_{正方形AFBH}=x^2$，在 AB 上作矩形 $AGDH$，如图 6-5，使得 $S_{矩形BDGF}=21$，则 $AG=10$. 平分 HD 于 E 点（设 E 在 BD 上）. 过 E 作 $TE\perp BD$，并延长 TE 至 C，使得 $TC=ED$. 完成正方形 $TGLC$ 和 $ENMC$. 明显地，$S_{矩形BFTE}=S_{矩形NDLM}$，所以

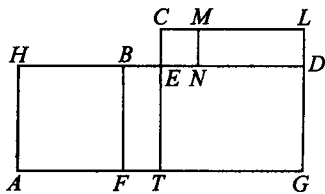


图 6-5

$$CM=\sqrt{S_{正方形TGLC}-S_{矩形TGDE}-S_{矩形NDLM}}=\sqrt{S_{正方形TGLC}-S_{矩形BFGD}}=2,$$

因此 $x=5-2=3$. 若 E 在 HB 上，如图 6-6，同样的方法，花拉子米得到 $x=7$.

方程 $x^2=3x+4$. 花拉子米的方法是在 AD 上截取 $AE=3$，将面积为 x^2 的

① 吴文俊：《出入相补原理》，载《中国古代科技成就》，中国青年出版社，1978，第 81 页.

正方形 $ABCD$ 分割为两部分 $AEFB$ 和 $EDCF$，如图 6-7；然后取 AE 的中点 G，并完成正方形 $GMOD$ 和 $GKLE$. 显然 $S_{矩形KMNL}=S_{矩形NOCF}$，因此

$$GD=\sqrt{S_{正方形GKLE}+S_{矩形KMNL}+S_{矩形EDON}}=\sqrt{S_{正方形GKLE}+S_{矩形EDCF}}=\frac{5}{2},$$

从而可求出 $x=GD+AG=4$.

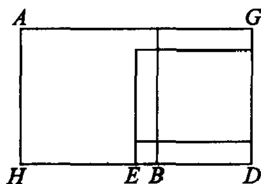


图 6-6

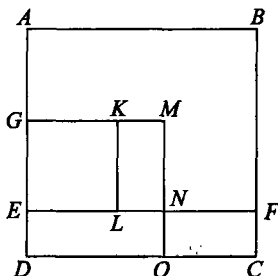


图 6-7

据数学史家 S. 甘兹(Solomon Gandz)的考察，花拉子米并非希腊数学的信徒. 当时巴格达的"智慧宫"里聚集着各地来的大批学者(从事科学研究或希腊与印度科学著作的翻译、整理工作). 其中一部分人翻译、推崇和接纳希腊的演绎体系，并体现于他们的著作之中；以花拉子米为代表的另一部分学者，则反对希腊数学近乎纯粹逻辑演绎的介入，主张以几何证明为辅的算法体系，提倡数学与实际的结合. ①花拉子米的《代数学》明显地表现出这种倾向，全书自始至终没有提及欧几里得的《几何原本》，这绝不是偶然的.

花拉子米的《代数学》用十分简单的例题讲述了解一次和二次方程的一般方法，它的做法实质上已经把代数学作为一门关于解方程的科学来研究. 该书包括三部分：第一部分讲述现代意义下的初等代数，第二部分列举各种算术问题，第三部分是关于遗产继承方面的应用问题.《代数学》在 12 世纪传入欧洲，之后的几个世纪，它成为欧洲人的标准课本，其内容、思想和方法相当广泛地影响过历代数学家. 如中世纪著名的数学家斐波那契、15 世纪著名数学家帕乔利等都深受《代数学》的影响. 事实上，在中世纪和文艺复兴时期，凡是在代数学方面有过贡献的欧洲学者，他们的工作都不同程度地受到花拉子米的影响.《代数学》以其逻辑严密、系统性强、通俗易懂和联系实际紧密等特点被奉为代数教科书的鼻祖.

---

① van der Waerden, *A History of Algebra*, Springer-Verlag, 1985, pp. 12—15.

花拉子米之后，其他一些阿拉伯数学家继续研究二次方程. 他们中有的基本追随花拉子米，如阿布·卡米尔，曾对花拉子米《代数学》作了系统的评述. 另有一些学者则借助希腊几何来重新证明花拉子米的结果，如著名的希腊著作翻译者和注释者泰比特就是如此. 但总的说来，他们都未做出比花拉子米更好的工作. 公元1100年左右，另一位阿拉伯学者奥马·海亚姆在其著作《代数学》(1070年)中于前人成就的基础上进一步系统地论述了代数方程理论. 关于二次方程的代数解法，奥马·海亚姆同时给出了利用与花拉子米相同的方法和利用《几何原本》中有关性质(面积贴合)的证明. 但对于二次方程，奥马·海亚姆也未能取得新的改进.

三次方程的几何解法

三次方程，古希腊已有几何解法的端倪. 但是，除中国在三次方程的数值解法上取得了较大的进展之外，一直到阿拉伯时代，一般三次方程的解法并未取得明显的突破. 随着数学的发展，一般三次方程的求解问题迫切需要解决，大批学者投身于这一问题的研究. 约公元860年，阿拉伯学者马哈尼(al-Māhāni，825—888)首先考虑了阿基米德问题(即平面切球成定比)，给出了三次方程 $x^3+a^2b=cx^2$①，但未能解决(无论是代数的还是几何的)，并最终认为该方程不可解. 但通过马哈尼的工作，这种形式的方程受到了阿拉伯学者的足够重视，以致于该方程在阿拉伯被称为“马哈尼方程”. 同时代的泰比特使用和希腊学者梅内科姆斯同样的方法解决了倍立方问题中出现的三次方程，然而未能解决马哈尼方程. 大约1个世纪之后，哈岑同样考虑了三次方程 $x^3+a^2b=cx^2$. 和阿基米德一样，利用圆锥曲线相交的方法给出了该方程的解. 他的圆锥曲线是抛物线 $x^2=ay$ 和双曲线 $y(c-x)=ab$.②与哈岑同时代的学者阿布·朱德(Abū'l Jūd)在三次方程的解法上取得了一定的成就，同样利用二次曲线相交，他解决了两种类型的三次方程. 对形式 $x^3+a=bx^2$ 的三次方程，他首先设 $AB=b$，$BC^3=a$，BC 为从 AB 上截取的线段；然后分 $BC>CA$，$BC=CA$ 和 $BC<CA$ 三种情形讨论. 以现代的语言和符号叙述大致如下：

(i) $BC<CA$，即 $2\sqrt[3]{a}<b$ 时. 如图6-8，以 BC 为边作正方形 $BCDE$. 以 BE，BA 为渐近线作过点 D 的双曲线，并作以 A 为顶点、BC 为参数、BA 为轴的抛

① D. E. Smith, *History of Mathematics* (Ⅱ), Ginn and Company, 1925, p. 455.

② D. E. Smith, *History of Mathematics* (Ⅱ), p. 456.

物线. 设两曲线的交点为 F,G. 过点 F 作 BA,BE 的垂线 FL,FT，则 BL 即为上述三次方程的解. 点 G 同样有此结论.

阿布·朱德给出了几何证明：$S_{矩形BLFT}=S_{正方形BCDE}$，所以 $BL\cdot LF=BC^2$，故有 $BL:BC=BC:LF$，$BL^2:BC^2=BC^2:LF^2$. 而 $LF^2=LA\cdot BC$（因为 F 在抛物线上），所以 $BC:LF=LF:LA$，$BC^2:LF^2=BC:LA$，因此 $BL^2:BC^2=BC:LA$，即 $BL^2\cdot LA=BC^3$，两边同时加上 BL^3，则 $BL^3+BC^3=AB\cdot BL^2$，而 $AB=b$，$BC^3=a$，所以 BL 为方程的解. 事实上，阿布·朱德即相当于给出了双曲线 $xy=\sqrt[3]{a^2}$ 和抛物线 $y^2=-\sqrt[3]{a}(x-b)$，两方程消去变量 y 后即得 $x^3+a=bx^2$.

图 6-8

（ⅱ）$BC=CA$，即 $2\sqrt[3]{a}=b$ 时. 阿布·朱德的做法与(i)相同. 他认为此时抛物线与双曲线相切于点 D，事实上这是错误的. 这种情况下，两曲线除交点 D 外，另有一个交点，其在 BA 上的投影位于点 C,A 之间. 阿布·朱德的错误后被海亚姆指出，并给出几何证明.[①]

（ⅲ）$BC>CA$，即 $2\sqrt[3]{a}>b$ 时. 阿布·朱德认为此时两曲线不相交，因此方程不可解. 这也是不正确的，后也被海亚姆指出，并举具体例子 $x^3+41^3=80x^2$ 和 $x^3+144=10x^2$ 分别说明两曲线相交和相切的情形.

另外，阿布·朱德还考虑了四项方程 $x^3+cx+a=bx^2$. 他的讨论只限于 $c^2<ab$ 且 $a^{\frac{3}{2}}+c^2\sqrt{b}<\sqrt{a}bc$ 的情形. 利用双曲线 $xy=\sqrt{c}x+\frac{a}{\sqrt{c}}$ 和半圆 $\left(x+\frac{a}{2c}-\frac{b}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2c}+\frac{b}{2}\right)^2$ 相交的方法解决.

无论是泰比特、哈岑还是阿布·朱德，都只是解决了三次方程的一些特殊情形，而一般三次方程仍悬而未决. 这一工作由海亚姆经过多年的努力完成.

海亚姆 1048 年左右出生于内沙布尔，他出生的时代是一个政局动荡不安的时代. “海亚姆”是制造或经营帐篷的职业，说明他的父亲或祖辈是从事这种工作的. 海亚姆早年在家乡接受教育，以后成为一名家庭教师，生活十分清苦，没有很多闲暇时间从事科学研究. 正如他所说：“我不能集中精力去学习这种代

① D. S. Kasir, *The Algebra of Omar Khayyam*, Teacher College, Columbia University, 1931, pp. 118—119.

数学,时局的动乱阻碍着我……”1070 年,海亚姆来到撒马尔罕,在当地统治者的庇护下,完成他主要代数著作《还原与对消问题的论证》(*Risāla fi'l-barāhīn 'alā masā'il al-jabr wa'l-muqābala*,简称《代数学》). 不久,海亚姆应邀来到伊斯法罕,在那里管理天文台,进行历法改革. 他在伊斯法罕工作的 18 年是他一生中最安谧的日子.

海亚姆是一位博学的科学家,他在数学、天文学、哲学和诗歌等多方面都有突出建树. 在西方,他以诗人而闻名,他的四行诗广为流传.(郭沫若将其诗集译成中文,题名《鲁拜集》)

海亚姆在其代数学著作中将所有次数不高于三次的方程依项数和系数分为简单方程和复杂方程两大类共 25 种.[①]海亚姆的分类包含了有正根的所有可能的三次方程. 对不可化为二次方程的 13 种类型的每一种,海亚姆都设计了具体的二次曲线,就每种方程可能出现的情形进行了讨论,并附以严格的证明. 例如,同样对于三次方程 $x^3=a+bx^2$,海亚姆借助于所作的几何曲线(与阿布·朱德的相同),给出了方程的正根个数与系数的关系. 首先,海亚姆证明了该方程有正根的必要条件:$b>\sqrt[3]{a}$. 在 $b>\sqrt[3]{a}$ 的情形下又分三种情形讨论:

(i) $b>2\sqrt[3]{a}$ 时,方程有两正根.

(ii) $b=2\sqrt[3]{a}$ 时,方程有两正根$\left(\text{即}\sqrt[3]{a}\text{和}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt[3]{a}\right)$,指出并证明了阿布·朱德关于两曲线相切的断言的错误.

---

① 奥马·海亚姆的分类为:

(一) 简单方程

(1) $x=a$;(2) $x^2=a$;(3) $x^2=ax$;(4) $x^3=a$;(5) $x^3=bx^2$;(6) $x^3=cx$.

(二) 复杂方程

Ⅰ. 三项方程

(ⅰ) 二次方程: (7) $x^2+ax=b$; (8) $x^2+b=ax$; (9) $x^2=ax+b$.

(ⅱ) 可化为二次的: (10) $x^3+bx^2=cx$; (11) $x^3+cx=bx^2$; (12) $x^3=bx^2+cx$.

(ⅲ) 不可化为二次的: (13) $x^3+cx=a$; (14) $x^3+a=cx$; (15) $x^3=cx+a$; (16) $x^3+bx^2=a$; (17) $x^3+a=bx^2$; (18) $x^3=bx^2+a$.

Ⅱ. 四项方程

(ⅰ) 三项等于一项: (19) $x^3+bx^2+cx=a$; (20) $x^3+bx^2+a=cx$; (21) $x^3+cx+a=bx^2$; (22) $x^3=bx^2+cx+a$.

(ⅱ) 两项等于两项: (23) $x^3+bx^2=cx+a$; (24) $x^3+cx=bx^2+a$; (25) $x^3+a=bx^2+cx$.

(iii) $b<2\sqrt[3]{a}<2b$ 时，方程有两正根或不可解(事实上是虚根)，并以具体的例子说明了阿布·朱德的错误.

下以方程 $x^3+cx+a=bx^2$ 为例，用现代的语言和符号叙述海亚姆的几何求解过程：

Ⅰ. 他令 $BE=b, BC^2=c$，即 $BC=\sqrt{c}$，且 $BC\perp BE$. 作以 BC^2 为底，AB 为高的几何体，使其体积为 a，即 $BC^2\cdot AB=a$，所以 $AB=\frac{a}{c}$，AB 在 BE 的延长线上. 以 AE 为直径作半圆，则点 C 或者在圆内或者在圆上或者在圆外.

Ⅱ. 设点 C 在半圆内，即 $BC^2<AB\cdot BE, c^2<ab$. 延长 BC 交圆于点 Z，以 CZ 为边向圆内作矩形 $CZHM$，使其面积等于矩形 $ABCD$，则点 H 或者在圆内或 者在圆上或者在圆外.

(ⅰ) 点 H 在圆内. 此时 $BZ=\sqrt{AB\cdot BE}=\sqrt{\frac{ab}{c}}$，则 $CZ=BZ-BC=\sqrt{\frac{ab}{c}}-\sqrt{c}$，因为 $CZ\cdot CM=AB\cdot BC$，所以

$$CM=\frac{AB\cdot BC}{CZ}=\frac{\frac{a}{\sqrt{c}}}{\sqrt{\frac{ab}{c}}-\sqrt{c}}=\frac{a}{\sqrt{ab}-c},$$

$$HG^2=BZ^2<AG\cdot GE=(AB+CM)(BE-CM),$$

即

$$\frac{ab}{c}<\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{\sqrt{ab}-c}\right)\left(b-\frac{a}{\sqrt{ab}-c}\right),$$

所以 $a^{\frac{3}{2}}+c^2\sqrt{b}<\sqrt{a}bc$.

海亚姆作通过点 H 且以 CZ, CM 为渐近线的双曲线，则双曲线与半圆必有两个交点，设为 L, N，如图 6-9. 过点 L 分别作 AE, BZ 的垂线 LK, LT，过点 N 分别作 AE, BZ 的垂线 NF, NS. 因为 $S_{矩形CPLT}=S_{矩形CMHZ}=S_{矩形ABCD}$，两边加上 $S_{矩形BKPC}$，则 $S_{矩形AKPD}=S_{矩形BKLT}$，所以 $LK^2:AK^2=BC^2:BK^2$，而 $LK^2:AK^2=KE:AK$，故 $BC^2:BK^2=KE:AK$，即有 $BK^2\cdot KE=BC^2\cdot AK$，又 $BC^2\cdot AK=BC^2(AB+BK)=c\cdot BK+a$，所以

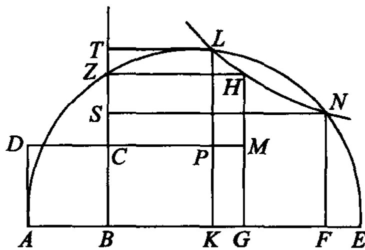


图 6-9

$$BK^3+c\cdot BK+a=BK^2(BK+KE)=BE\cdot BK^2=b\cdot BK^2,$$

因此 BK 就是方程的解. 同理可知 BF 也是方程的解.

(ⅱ) 点 H 在圆上,即 $a^{\frac{3}{2}}+c^2\sqrt{b}=\sqrt{a}bc$. 海亚姆对此没有讨论. 事实上,此时两曲线相交或相切. 相交时除点 H 的横坐标 $\frac{a}{\sqrt{ab}-c}$ (或 $b-\frac{a}{c}$) 为方程的一个解外,方程另有一个正解;相切时 $\frac{a}{\sqrt{ab}-c}$ 为方程的二重根.

(ⅲ) 点 H 在圆外,即 $a^{\frac{3}{2}}+c^2\sqrt{b}>\sqrt{a}bc$. 若双曲线与半圆相交,则情同(ⅰ);若相切则有两相等正根;否则,方程无正根(此时有两虚根).

Ⅲ. 点 C 在圆上,即 $c^2=ab$;或者点 C 在圆外,即 $c^2>ab$. 若两曲线相交或相切,则情形同上;否则方程不可解(即无正根,此时有两虚根). 这种情况下,海亚姆的思路是在 BC 的延长线上任取线段 CZ,以 CZ 为一边作矩形 $CZHM$,使其面积等于矩形 $ABCD$,然后再就点 H 的位置关系进行讨论. 此与Ⅱ中情形类似,海亚姆没有给出具体论述.

以现代解析几何的观点分析,海亚姆所作双曲线方程为

$$xy=\sqrt{c}x+\frac{a}{\sqrt{c}};$$

圆方程为

$$\left(x+\frac{a}{2c}-\frac{b}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2c}+\frac{b}{2}\right)^2.$$

二者消去变量 y,得

$$x^4+\left(\frac{a}{c}-b\right)x^3+\left(c-\frac{ab}{c}\right)x^2+2ax+\frac{a^2}{c}=0. \quad (*)$$

(*)式左边即为 $\left(x+\frac{a}{c}\right)(x^3+cx+a-bx^2)$.

若要完整画出两曲线,则除海亚姆讨论的情形外,圆和双曲线的另一支除固定交点 A,下半部分与双曲线尚有一交点,它对应于三次方程的一负根. 固定交点 A 的横坐标 $-\frac{a}{c}$ 是方程(*)的一根. 即两曲线除固定交点 A 外应有三个交点(实交点和虚交点),它们对应于方程的三个根. 另外,海亚姆的研究还涉及到退化二次曲线的情形. ①

海亚姆实际上给出了可能有正根的一般三次方程的几何解法,这在代数方程理论的历史上是具有开创性的工作,也是代数方程理论和几何学密切联系的

---

① D. S. Kasir, *The Algebra of Omar Khayyam*, pp. 97—101.

又一个很好的例子.

阿拉伯学者的三次方程理论虽然是早期希腊几何代数方法的继承和发展，但又体现了他们自己的创造与特征. 与希腊几何代数本质不同的是，阿拉伯代数提出明确的三次方程作为研究对象，而几何方法仅是他们解决这些方程的手段. 作为主要的几何方法——二次曲线相交法，阿拉伯学者直接承袭自希腊人. 但如上所述，无论是在其运用技巧还是所达到的成就上都比他们的希腊先驱者远高一筹. 另外，阿拉伯学者认为几何方法解代数方程，方程应转化为几何形式且各项维数应保持一致，这与希腊几何代数对线段、面积和体积作严格区分是相似的. 但阿拉伯人同时建立了“面数”、“立体数”等概念，以避免数与几何量的逻辑不一致，又使得数与几何量之间可以自由过渡. 三次方程的几何解法在阿拉伯学者那里，特别是到了海亚姆的时代已具有一定程度的系统性，但仍存在着不足之处. 首先，用于求解方程的二次曲线只是给出了一部分（双曲线的一支或半圆），并非完整的二次曲线，致使他们的考虑带有一定的局限性；其次，他们只是求得了方程的正根，而负根和虚根被全部忽略，这与他们所作二次曲线的不完整以及当时对负根的不接受和没有产生虚数的概念有关；另外，即使是仅限于正根的情形也仍然不够彻底. 如海亚姆在讨论方程 $x^3+a=bx^2$ 时，当 $a<bc$ 和 $a=bc$ 时均有一正根被忽略. 而对于方程 $x^3+cx=bx^2+a$，当 $a<bc$ 时，方程可能有三个正根，而他只求得一个.

阿拉伯学者也曾试图寻求一般三次方程的代数解法，但均未获得成功. 如海亚姆所说：“当问题的对象是绝对的数时，不论是我们还是掌握这门技艺的任何人，都不能论证这些类型的方程，也许在我们之后的什么人能够得到不仅仅包含三个低次幂（即数、东西和平方）的方程的解法.”[①]一般三次方程的代数解法直到 16 世纪才由意大利数学家卡尔达诺在其著作《大术》(*Ars Magna*)中给出，但却采取了与海亚姆等不同的途径.

6.1.3 影响与结论

综上所述，分析阿拉伯学者关于代数方程求解的工作，可以看到两条不同的发展路线：一是以花拉子米为主要代表，明确给出解的代数表述或算法，同时为之提供以出入相补原理为基础的几何证明；另一则是以海亚姆为主要代表，以二次曲线相交的几何方法为基础寻求代数方程的解. 这两条不同的路线有着

① D. S. Kasir, *The Algebra of Omar Khayyam*, p. 49.

不同的思想来源，并产生不同的历史影响. 以花拉子米为代表的路线，本质上属于中国与印度的传统，体现了东方数学的特色：以构造算法为主，以出入相补型的几何证明为辅. 这条路线对文艺复兴时期的数学家的代数方程研究有着不容忽视的影响. 众所周知，文艺复兴时期意大利数学家卡尔达诺、费拉里(Ferrari，1522—1565)等给出了三、四次方程的代数解法，他们同样附加了大量与方程求解有关的规则的几何证明. 如卡尔达诺对于三次方程

$$x^3+px=q$$

的几何证明，虽然他以平面图形来表示立体的情况，但证明的实质意味着依据假设将一立方体分割为8个小立方体，并利用体积关系最终证明所给出的方程解的代数表达式的正确性. 卡尔达诺的这种证明方法似为花拉子米二次方程几何证明在三维空间的推广，与中国古代立体图形的割补损益变换相似. 对于四次方程，他们的证明方法则更为典型. [①]这样我们就可以看到中国或印度—阿拉

① 参见卡尔达诺《大术》，其中首先证明了相当于下列代数表达式的命题：

$$(A+a+b)^2=(A+a)^2+2bA+b^2+2ab.$$

其过程大致如下：

设正方形 $ACFE$ 被分为两个正方形 $ABDP$，$DQFM$ 以及两个矩形 $BCQD$，$PDME$，在正方形 $ACFE$ 外补加折形 $KEFCGH$，如图 6-10，则折形面积为 $GC^2+2GC\cdot CA$，所以由面积关系得

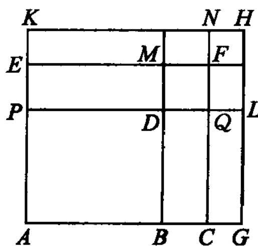


图 6-10

$$\begin{aligned}S_{\text{正方形}AGHK}&=(AB+BC+CG)^2\\&=(AB+BC)^2+CG^2+2GC\cdot CA\\&=(AB+BC)^2+2GC\cdot AB+CG^2+2GC\cdot BC.\end{aligned}$$

命题得证.

卡尔达诺在将此命题应用于解四次方程时，取等式中的 $A=x^2$，即

$$(x^2+a+b)^2=(x^2+a)^2+2bx^2+b^2+2ab.$$

明显地，证明过程中，卡尔达诺采取了对平面图形的分割和补加(移置)，利用图形面积间的简单相等关系得到结论.

伯—文艺复兴这样一条代数方程发展的思想线索.

当然,如我们已经指出的那样,阿拉伯学者给出的是求方程精确解的算法,这使得他们在代数方程领域达到了中国学者所不及的高度.但另一方面,阿拉伯人在对负数的认识及方程估根等方面积累的知识却不能与擅长数值求解的中国学者相比,这又使得他们在数值求解方面停留于开高次方的方法而未能像中国宋元数学家那样成功地推进到一般高次方程.

至于以海亚姆为代表的另一条路线,则明显地是希腊几何代数的延伸.利用圆锥曲线解一般三次方程,这无疑是数学史上的一朵奇葩,但它对文艺复兴时期的代数方程理论却没有产生任何影响.海亚姆的《代数学》首次译成欧洲文字晚至 19 世纪.①在此之前,欧洲人几乎完全不知道海亚姆的工作.这项本来可以推动代数与几何密切结合的重要成就,随着阿拉伯文化的衰落而沉睡多年,与花拉子米代数的影响堪为鲜明对照,这在数学史上确是一个值得进一步思考研究的课题.

§6.2 沙拉夫丁·图西对于三次代数方程正根的讨论

我们知道,阿拉伯学者奥马·海亚姆在其著作《代数学》中对含有常数项的 13 种三次方程分别利用两条圆锥曲线(或一条圆锥曲线与一个圆)相交的方法给出了其解的几何构造,且指出方程根的数目依靠圆锥曲线(或圆)交点的个数(仅局限于有正根的情形).②然而,海亚姆的著作中既没有画出圆锥曲线(或圆)的图形,也没有精确地给出曲线交点个数和三次方程系数之间的关系以及方程的根与方程系数之间的关系,也就是说海亚姆的讨论在某种程度上来说只是定性的.继海亚姆之后,阿拉伯学者沙拉夫丁·图西在海亚姆工作的基础上,进一步讨论了三次方程.他同海亚姆一样将小于等于 3 次的代数方程依系数分为 25 种,对于 18 种三次方程,沙拉夫丁·图西又分为三组:不含常数项的 5 种;含常数项,但对任意正系数都有(至少有)一个正根的三次方程 8 种;含常数项,在确

① F. Woepcke, *L'algèbre d'Omar Alkhayyami*, 1851.

② 在奥马·海亚姆之前已有许多阿拉伯学者研究过三次方程,如泰比特、哈岑以及阿布·朱德等,他们都曾利用圆锥曲线(或圆)相交的方法解决了某些特殊类型的三次方程,但均未画出过曲线的图形,以至于所有的中世纪学者也是如此.奥马·海亚姆的工作参见 D. S. Kasir, *The Algebra of Omar Khayyam*, Columbia University, 1931.

定条件下有(正)根的5种.沙拉夫丁·图西代数学著作的第一部分讨论了二次方程以及三次方程的前两组,他利用和海亚姆相同的方法给出了这些三次方程根的几何构造,并给出了具体数字方程的数值解法;第二部分则用来论述三次方程的后一组,也就是用来讨论:

$$x^3+a=bx^2; \tag{1}$$

$$x^3+a=bx; \tag{2}$$

$$x^3+bx^2+a=cx; \tag{3}$$

$$x^3+cx+a=bx^2; \tag{4}$$

$$x^3+a=bx^2+cx \tag{5}$$

5种类型的方程.不同于海亚姆,沙拉夫丁·图西给出了这5种方程的(正)根和方程系数之间的精确关系,从而由定性的讨论上升到定量的论述,充实、发展了中世纪的方程论.

海亚姆的三次方程的几何理论,是通过几何图形的巧妙构造寻找方程根的几何表示,他的思想是建立在几何的基础上的.沙拉夫丁·图西则不然,他超越了这一传统的框架,讨论中引入了函数概念.尽管几何方法仍然是其讨论过程中的主要方法,但函数的思想却贯穿始终,几何方法不过是沙拉夫丁·图西表现其思想的方式、手段.

记 $f(x)=mx^3+nx^2+rx$, $f(x)=a$ 表示沙拉夫丁·图西的上述5种方程,则他的思想方法大致可概括为以下几个方面:

(Ⅰ)函数 $f(x)=mx^3+nx^2+rx$,当 x 满足方程 $3mx^2+2nx+r=0$ 时(取正根,若有两正根取较大者),$f(x)$取最大值.即设 x_0 为方程 $3mx^2+2nx+r=0$ 的正根(有两正根取较大者),则任给 $x\neq x_0(x>0)$,有 $f(x)<f(x_0)$.

(Ⅱ)x 为函数方程 $f(x)=a$ 的解当且仅当 $y=x-x_0$ 为方程

$$my^3+(3mx_0+n)y^2=a-f(x_0) \tag{6-2-1}$$

的解,从而将求 $f(x)=a$ 的一根转化为求辅助方程(6-2-1)的一根.

(Ⅲ)x 为方程 $f(x)=a$ 的解,当且仅当 $y=x_0-x$ 为方程

$$my^3+a-f(x_0)=(3mx_0+n)y^2 \tag{6-2-2}$$

的解(这里沙拉夫丁·图西取 y 为最小正根),从而将求 $f(x)=a$ 的另一根转化为求辅助方程(6-2-2)的一根.

(Ⅳ)特别地,针对第(1)种方程,沙拉夫丁·图西依(Ⅱ)求出其一根 x_1 后,并未沿袭(Ⅲ)的步骤,而是利用多项式 x^3-bx^2+a 与 $x-x_1$ 的商式——一个

二次多项式，求得 $f(x)=a$ 的另一根.

（V）讨论了方程的根的上下界.

对于上述5类方程，海亚姆如前所述同样利用圆锥曲线（或圆）相交的方法给出它们的解的几何构造（并就每类方程依系数的不同关系分为不同的情形进行了讨论）. 沙拉夫丁·图西的讨论则省掉了这一重复的过程，他将问题转化为上面的分析过程. 由于对辅助方程的根，沙拉夫丁·图西在其著作的第一部分已用圆锥曲线相交的方法构造出来或可通过数值解法求得，所以他著作的第二部分并没有出现圆锥曲线（或圆）. 从这种意义上讲，他的分析过程是定量的. 下面将具体介绍沙拉夫丁·图西的这一工作.

6.2.1 沙拉夫丁·图西对于方程 $x^3+a=bx$ 的讨论

首先，沙拉夫丁·图西说明方程(2)的（正）根必满足 $x<\sqrt{b}$. 设 $AB^2=b$，即 $AB=\sqrt{b}$，$AE=x$，如图6-11所示，则方程可化为 $AE(AB^2-AE^2)=a$，即 $AE[\alpha\beta]=a$. 这里 $[\alpha\beta]$ 表示折形 $B\alpha MN\beta E$ 的面积，$[\alpha\beta]=BE(AE+AB)$. 因此

$$AE\cdot BE(AE+AB)=a.$$

然后，沙拉夫丁·图西给出了如下引理：

引理 设 $[A\gamma]=\frac{1}{3}[A\alpha]$，则当 $AE=AD$ 时，$AE[\alpha\beta]$ 取最大值.

沙拉夫丁·图西分 $AE<AD$ 和 $AE>AD$ 两种情形证明，他证明两种情形下总有 $AD[\alpha\gamma]>AE[\alpha\beta]$. 这里，引理的条件 $[A\gamma]=\frac{1}{3}[A\beta]$，也就是

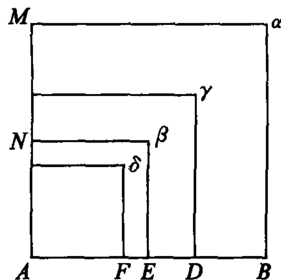


图 6-11

$AE=AD=\sqrt{\frac{b}{3}}$. 即当 $x=\sqrt{\frac{b}{3}}$ 时，$f(x)=bx-x^3$ 取最大值 $\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}$. 拉塞德认为沙拉夫丁·图西该引理的思想基础是一阶导数的概念，他称沙拉夫丁·图西已经有了导数的概念，且已成为他三次方程求解的一个组成部分，但在当时由于符号系统的缺乏等原因，导数概念的使用只是偶有发生，并未被普遍使用和进一步发展，沙拉夫丁·图西在其著作中则删掉了导数概念的使用这一过程，借

助于几何方法综合地得到了上述命题.[①] 显然，利用现代数学工具，$f(x)=bx-x^3$取最大值当且仅当$f'(x)=b-3x^2=0$，即$x=\sqrt{\frac{b}{3}}$. 然而，并没有明确的证据说明中世纪的阿拉伯学者(以至于所有其他国家和地区的学者)确已有了导数的概念. 霍根迪耶克(Jan P. Hogendijk)则认为沙拉夫丁·图西得到上述结果并非利用导数概念，而可能是借助传统的几何方法分析得到，并给出综合证明. 作者的观点更倾向于后者. 一者，当时的数学知识和实际背景还没有为导数概念的产生提供成熟的条件，虽然早已有了无穷小概念及原始的极限概念，但在当时还未发展成熟，对其本质的认识仍不够深刻，实用技术对这一理论的需要还不够迫切；再者，符号系统的缺乏和传统观念的影响也阻碍了人们对这一理论的涉足. 因此，我们更倾向于为沙拉夫丁·图西的结论提供传统方法的分析.

记$f(x)=bx-x^3=AB^2\cdot x-x^3$，$D$为$E$，$B$之间的任一点，$F$为$A$，$E$之间任一点，如图6-11，则

$$f(AE)=AE[\alpha\beta],$$
$$f(AD)=AD[\alpha\gamma],$$
$$f(AF)=AF[\alpha\delta].$$

$f(AE)-f(AD)=AE[\alpha\beta]-AD[\alpha\gamma]=AE[\gamma\beta]-DE[\alpha\gamma]=DE(AE(AE+AD)-[\alpha\gamma])$，

$f(AF)-f(AE)=AF[\alpha\delta]-AE[\alpha\beta]=AF[\beta\delta]-EF[\alpha\beta]=EF(AF(AF+AE)-[\alpha\beta])$.

要使得$f(AE)$为最大值，则必须满足以下条件：

$$(\text{i})\ AE(AE+AD)>[\alpha\gamma];$$
$$(\text{ii})\ AF(AF+AE)<[\alpha\beta].$$

因为$AE(AE+AD)>2AE^2$，$AF(AF+AE)<2AE^2$，$[\alpha\beta]>[\alpha\gamma]$，所以，如$2AE^2\geqslant[\alpha\beta]$，则(i)成立；如$2AE^2\leqslant[\alpha\beta]$，则(ii)成立. 因此，如果$E$点能够使得

$$2AE^2=[\alpha\beta]$$

---

① 在 *The development* 中，R. Rashed 曾多次提到沙拉夫丁·图西在其代数学著作中利用实际相当于一阶导数概念求函数表达式的最大值.

成立，则 $f(AE)$ 为最大值. 设 $AE=x$，则由上式可得

$$x=\sqrt{\frac{b}{3}}.$$

这正是沙拉夫丁·图西引理中的条件.

证明引理之后，沙拉夫丁·图西分三种情形讨论了方程(2)的解的情形：

当 $AD[\alpha\gamma]<a$（即 $\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}<a$）时，由于 $AE[\alpha\beta]<AD[\alpha\gamma]$，所以方程无根；

当 $AD[\alpha\gamma]=a$（即 $\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}=a$）时，方程有唯一（正）根，即 $x=\sqrt{\frac{b}{3}}$（此时 $\sqrt{\frac{b}{3}}$ 为方程(1)的重根）；

当 $AD[\alpha\gamma]>a$（即 $\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}>a$）时，沙拉夫丁·图西令

$$AD[\alpha\gamma]=a+k \quad (k \text{ 为正数}).$$

随后，考虑辅助方程

$$y^3+k=3AD\cdot y^2, \tag{6}$$

并证明该方程的（正）根 $y<BE<AD$. 事实上，沙拉夫丁·图西的证明是不充分的. 如设 $g(y)=3AD\cdot y^2-y^3$，则 $g'(y)=3AD\cdot 2y-3y^2$. 由 $g'(y)=0$，得 $y=0$ 或 $y=2AD$. $\forall y\in(0,2AD)$，有 $g'(y)>0$，因此 $g(y)$ 在 $[0,AD]$ 上单调递增，且 $g(0)=0, g(AD)=2AD^3$. 由 $k<AD[\alpha\gamma]=2AD^3$，所以必存在 $y_0\in[0,AD]$，使得 $g(y_0)=k$. 另外，$\forall y\in(2AD,3AD)$，有 $g'(y)<0$. 因此 $g(y)$ 在 $[2AD, 3AD]$ 上单调递减，且 $g(2AD)=4AD^3, g(3AD)=0$，故必存在 $y_1\in[2AD, 3AD]$，使得 $g(y_1)=k$. 所以方程(6)有两正根. 沙拉夫丁·图西的意图是证明方程(2)最小根的存在. 他设 DG 为(6)的根，并取 $DH=DG, AQ=2AD$，如图 6-12. (2)可化为 $DH^2\cdot GH=k$，随后证明 AH 为方程(2)的一根，且 $AH<AD$.

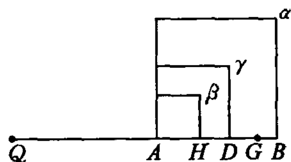


图 6-12

另外，沙拉夫丁·图西进一步考虑了另一辅助方程

$$y^3+3AD\cdot y^2=k, \tag{7}$$

并以同样的方式证明了若 y_0 为(7)的根（唯一正根），则 $x=AD+y_0$ 为方程 (2)

的根.这样,沙拉夫丁·图西在条件 $AD[\alpha\gamma]>a$ 即 $\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}>a$ 之下,求得方程的两个正根 x_1,x_2,且 $x_1<AD=\sqrt{\frac{b}{3}}$,$x_2>AD=\sqrt{\frac{b}{3}}$.显然,辅助方程中的 $k=AD[\alpha\gamma]-a=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b}{3}}-a$.令 $x=\sqrt{\frac{b}{3}}-y$,代入方程(2)得

$$
\begin{aligned}
x^3-bx+a&=\left(\sqrt{\frac{b}{3}}-y\right)^3-b\left(\sqrt{\frac{b}{3}}-y\right)+a\\
&=\frac{b}{3}\sqrt{\frac{b}{3}}-3y\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^2+3\sqrt{\frac{b}{3}}\cdot y^2-y^3-b\sqrt{\frac{b}{3}}+by+a\\
&=3\sqrt{\frac{b}{3}}y^2-y^3-\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}+a=0,
\end{aligned}
$$

即 $y^3+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b}{3}}-a=3\sqrt{\frac{b}{3}}y^2$.

同样,令 $x=\sqrt{\frac{b}{3}}+y$ 代入(2),可得

$$y^3+3\sqrt{\frac{b}{3}}y^2=\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}-a.$$

即沙拉夫丁·图西考虑的辅助方程(6)(7)可分别通过变换 $x=\sqrt{\frac{b}{3}}-y$ 和 $x=\sqrt{\frac{b}{3}}+y$,由方程(2)而得.此外,沙拉夫丁·图西的讨论 $AD[\alpha\gamma]\geqslant a$ 即 $\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}\geqslant a$,$4b^3-27a^2\geqslant 0$ 时,方程有正根;$AD[\alpha\gamma]<a$ 即 $4b^3-27a^2<0$ 时,方程不可解(无正根).沙拉夫丁·图西给出了此类方程的判别式条件.

6.2.2 沙拉夫丁·图西关于方程 $x^3+a=bx^2+cx$ 的解法

记 $f(x)=bx^2+cx-x^3$,则方程(5)可写成 $f(x)=a$.沙拉夫丁·图西依方程(5)的系数 b,c 之间的关系分三种情形:$b=\sqrt{c}$;$b>\sqrt{c}$;$b<\sqrt{c}$,并利用几何方法讨论了(5)的解的情况.他的论述虽然是以几何的形式给出,却完全可以用现代的符号以代数的方式表述出来.下面我们将沿着沙拉夫丁·图西的论述以代数的形式简述其求解方程(5)的过程.

Ⅰ. $b=\sqrt{c}$.

沙拉夫丁·图西首先证明这种情形下方程(5)有解(正根)的必要条件是 $a\leqslant b^3$. 他将(5)的解分为 $x>\sqrt{c}$ 和 $x<\sqrt{c}$ 两种情况讨论,随后得出结论:

$a>b^3$ 时,方程(5)无(正)根;

$a=b^3$ 时,方程(5)有唯一(正)根 $\sqrt{c}$(此时为重根);

$a<b^3$ 时,方程(5)有两个根.

当 $a<b^3$ 时,考虑辅助方程

$$y^3+2by^2=b^3-a. \tag{8}$$

设 y_0 为(8)的(正)根,则

$$y_0^2(y_0+2b)+a=b^3,$$

两边同时加上 b^2y_0 得

$$y_0(y_0+b)^2+a=b^3+b^2y_0,$$

再同时加上 $b(y_0+b)^2$ 得

$$(y_0+b)^3+a=b^2(b+y_0)+b(y_0+b)^2,$$

因此 $b+y_0$ 为方程(5)的解. 由(8)得 $by_0^2<y_0^2(y_0+2b)<b^3$,所以 $y_0<b$,$b+y_0<2b$.

对于方程(5)的另一根,考虑辅助方程

$$z^3+b^3-a=2bz^2. \tag{9}$$

设 z_0 为(9)的较小根(则 $z_0<b$)①,同样可以证明 $b-z_0$ 为方程(5)的解. 显然 $b-z_0>0$,方程(5)的两根在 0 与 $2b$ 之间.

Ⅱ. $b>\sqrt{c}$.

沙拉夫丁·图西首先证明如下引理:

引理 当 x 为方程 $2by+c=3y^2$ 的解(正根)时,函数 $f(x)$ 取最大值. 即设 y_0 为方程 $2by+c=3y^2$ 的(正)根,$\forall x\neq y_0, x>0$,有 $f(x)<f(y_0)$.

沙拉夫丁·图西首先证明 $\sqrt{c}<y_0<b$. 事实上

$$\sqrt{c}=\frac{\frac{2}{3}\sqrt{c}+\sqrt{\frac{4}{9}c+\frac{4}{3}c}}{2}<y_0=\frac{\frac{2}{3}+\sqrt{\left(\frac{2}{3}b\right)^2+\frac{4}{3}c}}{2}<\frac{\frac{2}{3}b+\sqrt{\left(\frac{2}{3}b\right)^2+\frac{4}{3}b^2}}{2}=b,$$

然后分 $y_0<x<b$, $x=b$, $x>b$, $\sqrt{c}<x<y_0$, $x=\sqrt{c}$ 和 $x<\sqrt{c}$ 等 6 种情况分别证明

---

① 沙拉夫丁·图西在其著作第二部分关于方程 $x^3+a=bx^2$ 的讨论中已得出当 $b>2\sqrt[3]{a}$ 时,方程一根位于 0 与 $\sqrt[3]{a}$ 之间,另一根位于 $\sqrt[3]{a}$ 与 b 之间,与奥马·海亚姆的讨论相同. 这里,若应用于方程(9),则可得方程(9)的较小正根 $z_0<\sqrt[3]{b^3-a}<b$.

了该引理.

当 $y_0<x<b$ 时,

$$bx^2+cx-x^3=(b-x)x^2+cx=y_0^2(b-x)+(x-y_0)(x+y_0)(b-x)+cy_0+c(x-y_0), \tag{10'}$$

$$by_0^2+cy_0-y_0^3=y_0^2(b-y_0)+cy_0=y_0^2(b-x)+(x-y_0)y_0^2+cy_0, \tag{10''}$$

所以

$$\begin{aligned}&by_0^2+cy_0-y_0^3-bx^2-cx+x^3\\&=(x-y_0)y_0^2-(x-y_0)(x+y_0)(b-x)-c(x-y_0)\\&=(x-y_0)[(y_0^2-c)-(x+y_0)(b-x)].\end{aligned} \tag{10}$$

因此要证明引理成立,只需证明(10)式中

$$y_0^2-c>(x+y_0)(b-x). \tag{11}$$

由于

$$y_0^2-c=2y_0(b-y_0)=2y_0(x-y_0)+2y_0(b-x),$$

$$(x+y_0)(b-x)=2y_0(b-x)+(x-y_0)(b-x),$$

$$2y_0=\frac{2}{3}b+\sqrt{\left(\frac{2}{3}b\right)^2+\frac{4}{3}c}>\frac{4}{3}b>b-x,$$

所以(11)式成立,因此有(10)>0,引理得证.

当 $x=b$ 时,

$$f(y_0)-f(x)=(x-y_0)(y_0^2-c)>0,$$

引理成立.

同样的方式沙拉夫丁·图西证明了其他几种情况下引理成立.

由(10′)及(10″)式可知,当时沙拉夫丁·图西似乎并不知晓立方差公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,而(10′)(10″)中的恒等转化则说明他可能意识到 a^3-b^3 因式分解中因子 $a-b$ 的存在,但也可能来自几何的观察(数学史家霍根迪耶克利用传统的几何方法提供了该引理的分析方式的证明).[①]由此沙拉夫丁·图西得出:

当 $f(y_0)<a$ 时,方程(5)无(正)根;

当 $f(y_0)=a$ 时,方程(5)有唯一根,即 y_0(重根).

---

① Jan P. Hogendijk, "Sharaf al-Din al-Tūsī on the Number of Positive Roots of Cubic Equations", *Historia Mathematica*, 16(1989), pp. 69—85.

之后，他分（ⅰ）$a>bc$；（ⅱ）$a=bc$；（ⅲ）$a<bc$ 三种情况进一步讨论了 $f(y_0)>a$ 时，(5)的根的情形.

（ⅰ）$a>bc$.

沙拉夫丁·图西考虑辅助方程

$$y^3+(3y_0-b)y^2=f(y_0)-a. \tag{12}$$

设 y_1 为(12)的根，他首先证明 $y_1<b-y_0$，然后证明 y_0+y_1 为方程(5)的根.

$$\begin{aligned}(y_0^2-c)y_1&=2y_0(b-y_0)y_1=2y_0y_1(b-y_0-y_1)+2y_0y_1^2\\&=2y_0y_1(b-y_0-y_1)+y_1^2(b-y_0-y_1)+y_1^2(3y_0-b+y_1)\\&=y_1(b-y_0-y_1)(2y_0+y_1)+y_1^2(3y_0-b+y_1)=(A),\end{aligned}$$

两边同时加上 $c(y_0+y_1)$ 得

$$(y_0^2-c)y_1+c(y_0+y_1)=y_0^2y_1+cy_0=(A)+c(y_0+y_1).$$

上式两边同时加上 $y_0^2(b-y_0-y_1)$ 得

$$\begin{aligned}f(y_0)&=y_0^2(b-y_0)+cy_0=y_0^2y_1+cy_0+y_0^2(b-y_0-y_1)\\&=(A)+c(y_0+y_1)+y_0^2(b-y_0-y_1)\\&=c(y_0+y_1)+(b-y_0-y_1)(y_0+y_1)^2+y_1^2(3y_0-b+y_1).\end{aligned}$$

而

$$f(y_0)-a=y_1^3+(3y_0-b)y_1^2=y_1^2(3y_0-b+y_1),$$

所以

$$a=c(y_0+y_1)+(b-y_0-y_1)(y_0+y_1)^2,$$

因此

$$b(y_0+y_1)^2+c(y_0+y_1)=(y_0+y_1)^3+a.$$

即 $y_0+y_1(y_0+y_1<b)$ 为方程(5)的根.

另外，沙拉夫丁·图西还考虑了辅助方程

$$z^3+f(y_0)-a=(3y_0-b)z^2. \tag{13}$$

设 z_1 为(13)的(较小)正根，类似于上面的证明，沙拉夫丁·图西得到 y_0-z_1 为方程(5)的另一根.

（ⅱ）$a=bc$. 容易证明 b 就是方程(5)的根(重根).

（ⅲ）$a<bc$. 沙拉夫丁·图西同样考虑了辅助方程(12)，并用相同的方法证明了此时(12)的根 $y_1'>b-y_0$，然后证明 y_0+y_1' 为方程(5)的根. 类似于（ⅰ）的情形，沙拉夫丁·图西还考虑了辅助方程(13)，若 z_1' 为(13)的根，则 y_0-z_1' 为方程(5)的根，证明过程与上述相似.

Ⅲ. $b<\sqrt{c}$.

类似于 $b>\sqrt{c}$的方式,沙拉夫丁·图西证明 $b<\sqrt{c}$时引理成立,且讨论了方程(5)的根的情形.

总之,对于类型(5)的方程,尽管他依系数间关系分为各种不同的情况进行讨论,但都考虑了辅助方程

$$y^3+py^2=q \text{ 及 } y^3+q=py^2, \text{这里 } p,q>0.$$

当 $b=\sqrt{c}$时,$p=2b, q=b^3-a$;

当 $b\neq\sqrt{c}$时,$p=3y_0-b, q=f(y_0)-a$.

两个辅助方程可以通过变换 $x=r+y$ 和 $x=r-y$ ($b=\sqrt{c}$时,$r=b$;$b\neq\sqrt{c}$时,$r=y_0$)由方程(5)得到.用相同的方法,沙拉夫丁·图西讨论了(3)和(4)两种类型的方程.在其论述的过程中,同样证明了相似的引理.对于类型(3),沙拉夫丁·图西斯证明当 x 满足方程

$$3x^2+2ax=b$$

时,函数

$$f(x)=bx-x^3-ax^2$$

取最大值.对于类型(4),他证明当 x 满足方程

$$3x^2+b=2ax$$

时,函数

$$f(x)=ax^2-x^3-bx$$

取最大值.对类型(3)(4)的解的讨论过程与前面的论述相似,但类型(1)的讨论有所不同.这里,沙拉夫丁·图西首先证明当 $x=\frac{2}{3}a$ 时,函数 $f(x)=ax^2-x^3$ 取最大值,并考虑了辅助方程

$$y^3+ay^2=\frac{4}{27}a^3-c.$$

设其根为 y_1,他证明 $x_1=m+y_1$ 为方程(1)的一根(以上讨论与其他方程相同).但在求解方程(1)的另一根时,却采用了与其他方程不同的方法.他借助于二次方程

$$x^2+(x_1-a)x=x_1(a-x_1) \tag{14}$$

求出了方程(1)的另一根.不难看出,若 x_1 为多项式 x^3-ax^2+c 的一根,则多项式

$$x^2+(x_1-a)x+x_1(x_1-a)$$

正是 x^3-ax^2+c 与 $x-x_1$ 的商式. 显然 (14)的根也是(1)的根. 这是凯拉吉和萨马瓦尔多项式理论在代数方程领域的继承和应用.

6.2.3 结 语

沙拉夫丁·图西三次方程正根的讨论,虽然借助于几何的方法,但其思想在某种程度上可以说是一种函数的思想,是代数分析方法的几何形式的体现. 沙拉夫丁·图西的工作并不完善,仍存在着一些缺陷,他没有给出这些方程的所有正根. 如方程(5)的讨论,在 $b>\sqrt{c}$, $a=bc$ 时,他只证明 $x=b$ 为其根,忽略了另一正根$\sqrt{c}$. 另外,所有方程的负根(或虚根,当时还没有虚数的概念)都没有被接受,并将方程无正根的情形称为"不可能"情形(奥马·海亚姆、花拉子米等其他阿拉伯学者也同样如此). 尽管如此,沙拉夫丁·图西三次方程正根的讨论在当时仍是领先的,同时代的其他国家的学者没有给出这一问题的如此完整的论述.

比较沙拉夫丁·图西三次方程正根数目的讨论与希腊几何代数中有关方程的论述(见上节),可以看出虽然二者都是以几何的形式体现出来,但存在着本质的不同.

(1) 前面的分析可以看出沙拉夫丁·图西问题讨论的关键:一是引理的证明,也就是寻找函数 $f(x)$取最大值时自变量 x 的值(或 x 满足的关系式);二是问题转化的思想. 他的过程虽是以几何的形式给出,也没有给出具体的变换,但实质上即是从对方程 $f(x)=a$ 的讨论转化为两个辅助方程(6-2-1)和(6-2-2)的讨论. 函数概念的引入和问题转化的思想是希腊的几何代数中所没有的.

(2) 在沙拉夫丁·图西的著作中,代数方程是明确给出的,且数和几何量已默认为可以自由过渡,不存在逻辑上的矛盾;而希腊几何代数则纯粹是几何形式的表述,并未涉及任何代数的形式,它的代数意义是后人通过考察而揭示的.

文艺复兴时期,沙拉夫丁·图西的问题转化思想在方程理论中重新被体现出来,卡尔达诺的《大术》最为明显. 它求解一般三次方程的关键之一就是选择各种适当的变换,将各类三次方程都转化为三种特殊情形,也就是:$x^3+px=q$;

$x^3+q=px$;$x^3=px+q$ (p,q 为正数),且也给出了相应的几何证明①. 虽然沙拉夫丁·图西和卡尔达诺的几何证明具有较大的差异,且沙拉夫丁·图西的讨论和卡尔达诺的相比缺乏一般性,但两位学者在三次方程求解的思想上具有一致性,都是将要求解的方程转化为某种特殊方程进行求解,都体现了一种问题转化的思想. 卡尔达诺的方法在某种程度上可以说是沙拉夫丁·图西思想的继承、发展和完善. 所不同的是:一方面,沙拉夫丁·图西的讨论是在他著作第一部分关于三次方程几何解法和数字方程数值解法的基础上展开的,卡尔达诺则给出了三种特殊的三次方程的具体代数解法;另一方面,虽然二者的论述都是以几何形式体现出来的,但沙拉夫丁·图西未给出方程解的相当于代数形式的表述,卡尔达诺则首先明确给出了方程解的代数表述,然后为其代数方法提供几何证明(或解释).

① G. Cardano, *The Great Art*, Translated and edited by T. R. Witmer, The MIT Press.

第七章　阿拉伯插值法的比较研究

插值法是计算数学中一种常用的函数逼近方法. 古代的天文计算与之有着密切的关系，特别是在古代中国的天文计算中，它是一种最常用的方法之一. 随着天文学的发展，希腊、印度以至于后来的阿拉伯在天文历法的计算中则沿着不同于中国的道路发展，它们都先后建立了“三角术”. 而“三角术”的使用与插值法又有着非同一般的关系. 中世纪的阿拉伯人一方面把插值法应用于三角函数值的近似计算，另一方面，特别是到后期，又直接作为天文历法计算的一种方法. 本章从比较的角度考察了阿拉伯的插值法.

§7.1　插值法的早期背景

早在公元 2 世纪，希腊天文学家托勒密在其天文学巨著《大汇编》中就使用了线性插值计算正弦函数值. 他首先基于当时已知的不等式

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<\frac{\alpha}{\beta}\quad\left(\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

求出了 1°的正弦值，然后给出了 0°—90°之间间隔为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ 的正弦表. 表中给出对应于连续整度数函数值的一阶差分值的 $\frac{1}{60}$ 的数值，这是用来计算其他角度的正弦函数值的. 事实上，若记 y_n 为托勒密正弦表中连续整度数 x_n 的正弦值，$\Delta y_n=y_{n+1}-y_n$ 为对应于 y_n 的一阶差分值，插值点间隔 $d=1^{\circ}$，以现代符号表示则相当于给出了线性插值公式

$$y=y_n+\frac{x-x_n}{d}\cdot\Delta y_n,$$

其中 $x_n<x<x_{n+1}$.

印度学者婆罗摩笈多在其天文学著作《婆罗摩修正体系》(628 年)中也描述了插值系统. 他给出一分为四列的正弦表，第一列为间隔是 15°的角，第二列为对应于前列各角的 $R\cdot\sin\theta(R=150)$ 的值，第三列和第四列分别为函数值的一

阶和二阶差分.婆罗摩笈多的主要目的在于二次插值,他的二次插值系统即是在线性插值公式

$$y=y_n+\frac{x-x_n}{d}\cdot\Delta y_n$$

的基础上首先借助于所给正弦表计算

$$\frac{x-x_n}{d}\cdot\frac{\Delta^2 y_{n-1}}{2}+\frac{\Delta y_n+\Delta y_{n-1}}{2},$$

然后以此式代替线性插值公式中的 Δy_n. 因此,婆罗摩笈多的二次插值公式即相当于

$$y=y_n+\frac{x-x_n}{2d}(\Delta y_{n-1}+\Delta y_n)+\frac{(x-x_n)^2}{2d^2}\cdot\Delta^2 y_{n-1}.$$

婆罗摩笈多的这一方法后被 12 世纪印度学者婆什迦罗(Bhāskara Ⅱ,1114—c.1185)在其天文学著作《天文系统极致》(*Grahaganita*)中引用,所不同的就是婆什迦罗的正弦表间隔为 10°.

在中国,线性插值法也是古代早期的天文计算中普遍使用的一种方法.《周髀算经》中就有线性插值法的记载,《九章算术》中的"盈不足术"也是一种简单的插值法.而中国东汉末年的天文学家刘洪在其《乾象历法》中则使用插值公式

$$f(n+x)=f(n)+x\cdot\Delta f(n)\qquad(0<x<1)$$

计算近地点后 $n+x$ 日时月球共行度数.公元 600 年左右,刘焯的《皇极历》创立了等间距二次内插法.公元 723 年,张遂的《大衍历》又将其发展为不等间距二次内插法.后曹士芳在《符天历》(780 年)中又直接给出了太阳视运动中心差的算式

$$f(x)=\frac{m(182-m)}{3\,300}.$$

曹士芳的思想被边冈在其《崇玄历》(892 年)中加以推广.总起来说,中国古代的二次插值法具有两个特点:①

一是以曹士芳、边冈为代表的公式化算法.即相当于采用以二次及三次多项式在一象限内逼近被插函数,再据原函数的周期性估算其他各象限内的值.

二是以刘焯、张遂为代表的分段插值法.用现代语言解释实际上就是数列的递推过程,即已知数列的首项 a_1 与公差 d,求数列的各项以及数列的前 n

---

① 曲安京,纪志刚,王荣彬:《中国古代数理天文学探析》,西北大学出版社,1994.

项和.

现将张遂的插值法的重要推算过程以现代符号引述如下：

入气后第 $k(k=1,2,3,\cdots)$ 日盈缩分

$$\delta_1=\frac{\Delta y_1+\Delta y_2}{d_1+d_2}+\left(\frac{\Delta y_1}{d_1}-\frac{\Delta y_2}{d_2}\right)-\frac{1}{d_1+d_2}\left(\frac{\Delta y_1}{d_1}-\frac{\Delta y_2}{d_2}\right),$$

$$\delta_2=\frac{\Delta y_1+\Delta y_2}{d_1+d_2}+\left(\frac{\Delta y_1}{d_1}-\frac{\Delta y_2}{d_2}\right)-\frac{3}{d_1+d_2}\left(\frac{\Delta y_1}{d_1}-\frac{\Delta y_2}{d_2}\right),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\delta_k=\frac{\Delta y_1+\Delta y_2}{d_1+d_2}+\left(\frac{\Delta y_1}{d_1}-\frac{\Delta y_2}{d_2}\right)-\frac{2k-1}{d_1+d_2}\left(\frac{\Delta y_1}{d_1}-\frac{\Delta y_2}{d_2}\right).$$

入气后 k 日盈缩分，入气后 k 日先后数

$$\begin{aligned}\sigma_k&=\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_k\\&=k\,\frac{\Delta y_1+\Delta y_2}{d_1+d_2}+k\left(\frac{\Delta y_1}{d_1}-\frac{\Delta y_2}{d_2}\right)-\frac{k^2}{d_1+d_2}\left(\frac{\Delta y_1}{d_1}-\frac{\Delta y_2}{d_2}\right),\end{aligned}$$

$$f(x_0+k)=f(x_0)+\sigma_k.$$

若记 $y=f(x)$，设 $x=x_0+k$，则

$$\begin{aligned}y=f(x_0)&+\frac{x-x_0}{d_1+d_2}(\Delta y_1+\Delta y_2)+(x-x_0)\left(\frac{\Delta y_1}{d_1}-\frac{\Delta y_2}{d_2}\right)\\&-\frac{(x-x_0)^2}{d_1+d_2}\left(\frac{\Delta y_1}{d_1}-\frac{\Delta y_2}{d_2}\right).\end{aligned}$$

§7.2 阿拉伯学者的线性插值法

线性插值法是阿拉伯学者计算三角函数近似值的一种常用方法. 早期阿拉伯学者比鲁尼在其天文学著作《马苏德教规》(*Mas'ūdic Canon*)中描述了其正弦函数的线性插值系统①. 比鲁尼出生和成长于咸海南部的花拉子模，很早就开始科学研究工作，并得到著名天文学家阿布·纳斯尔的指导. 他一生到过很多地方，包括中晚年在印度各地旅行和居住. 他的研究工作大都得到当地统治者的支持. 比鲁尼毕生从事科学研究工作，在 80 多岁视力和听力都已经丧失的情

① J. L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, 1986, pp. 146—151.

况下，他仍在一名助手的帮助下努力写作. 比鲁尼是一位博学多产的科学家，一生共写了大约 146 部著作，但流传至今的只有 22 部. 他的著作几乎涉及到当时所有的科学领域，在天文学、历史学、地理学、数学、力学、医学、药物学以及气象学等方面都有不同程度的贡献. 他的大部分著作是有关天文学和占星术的，在数学方面创新性的成果不多，但在数学的应用，尤其在数学的传播、东西方数学的交流方面，做出了突出贡献. 如他的著作《印度》一书详细介绍了印度文化，对东西方的文化交流起了积极的促进作用.

他给出了分为四个栏目的间隔为 $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ 的正弦表，其中第一栏为 0°—90°之间间隔为 $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ 的角的值，第二栏为对应于前栏各角的正弦函数值，第三栏为函数值的一阶差分值，第四栏是各差分值的四倍值. 若记 x_n 为各插值间隔点，y_n 为其对应函数值，$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ 为对应于 y_n 的一阶差分值，则比鲁尼的插值公式用现代符号即可写成

$$y = y_n + \frac{x - x_n}{d} \cdot \Delta y_n = y_n + 4(x - x_n) \cdot \Delta y_n,$$

其中 $x_n < x < x_{n+1}$.

事实上，正弦函数的线性插值法也为比鲁尼同时代的阿拉伯学者哈岑和伊本・雨依斯所知. 如伊本・雨依斯给出了相当于下式的插值公式

$$y = y_n + \frac{x - x_n}{d} \cdot \Delta y_n,$$

其中 $d = 1^\circ$，$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$，$x_n$ 为 0°—90°之间角的整度数值.

伊本・雨依斯已经从计算中观察到插值系统所得函数值总小于正弦函数的真实值，但没有给出有关的说明或论证. 记 $L\sin$ 为 sin 的线性插值，伊本・雨依斯的插值公式若写成正弦形式，则有

$$L\sin(\theta + x') = \sin\theta + \frac{\sin(\theta + 1^\circ) - \sin\theta}{60} \cdot x, 0 \leqslant x \leqslant 60.$$

设

$$f(x) = L\sin(\theta + x') - \sin\theta - \frac{\sin(\theta + 1^\circ) - \sin\theta}{60} \cdot x, 0 \leqslant x \leqslant 60,$$

则 $f(x)$ 为连续函数，且可以证明，对于任意 $x \in (0, 60)$，$f(x) > 0$，且存在 $x_0 > 30$（x_0 很接近 30）使得 $f(x_0)$ 为最大值. 当 $0 \leqslant x \leqslant x_0$ 时，$f(x)$ 的图象即正弦函数的真实值与线性插值的误差分布大致如图 7-1 所示.

继比鲁尼、伊本·雨依斯之后，15 世纪的阿拉伯学者卡西在其《修正的伊儿汗历》(*Zij-i Khāqāni*)中也描述了线性插值系统. ①他首先给出间隔为 1′的四位正弦函数表，然后根据计算精度的需要说明了他的在给定 1′间隔角的正弦值的累次线性插值，以现代符号表示其大致过程如下：

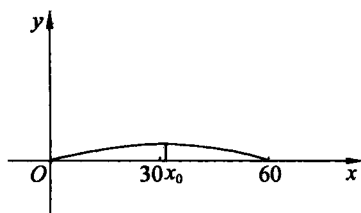


图 7-1

记 $f(x)=\sin x$，x_n 为 0°—90°之间间隔为 1′的角的值，$f(x_n)$为对应正弦值，$\Delta f(x_n)=f(x_{n+1})-f(x_n)$，$d=1'$，则

$$f(x_n+t)=f(x_n)+\frac{t}{d}\cdot\Delta f(x_n),$$

其中 $0<t<1'$，取角的整秒值；

$$f(x_n+t+k)=f(x_n+t)+\frac{k}{d^2}\cdot\Delta f(x_n),$$

$0<k<1''$，取角的整厘值；此过程继续下去，即有

$$f(x_n+t+k+\cdots+p+r)=f(x_n+t+k+\cdots+p)+\frac{r}{d^{m-1}}\cdot\Delta f(x_n)$$

$$=f(x_n)+\frac{t}{d}\cdot\Delta f(x_n)+\frac{k}{d^2}\cdot\Delta f(x_n)+\cdots+\frac{p}{d^{m-2}}\cdot\Delta f(x_n)+\frac{r}{d^{m-1}}\cdot\Delta f(x_n),$$

其中 $t,k,\cdots,p,r$ 的值与上述 t,k 类似. 实际上，卡西的插值过程就是正弦函数的一种迭代过程，其插值法是正弦函数一种比较简单的迭代法，是通过线性迭代来实现的，可以看做是一次线性插值的一种推广形式. 由于线性插值本身就是一种近似计算，所以，卡西尽管经过多次迭代，误差仍不能消除.

§7.3 阿拉伯学者的二次插值法

线性插值是阿拉伯学者进行三角函数近似计算的一种常用方法，三角函数则是早期阿拉伯学者进行天文计算的主要工具之一. 随着天文学的迅速发展，对三角函数的精确度的要求也越来越高. 天文学家们已经开始认识到线性插值

① Javad Hamadanizadeh, "The Trigonometric Tables of al-Kashi in his *Zij-i Khāqāni*", *Historia Mathematica*, 7(1980), pp. 38—45.

得到的三角函数值已不能满足日益发展的天文学的需要,也影响了天文计算的准确度.为了进一步提高三角函数值近似计算的精确度或进一步获得准确的天文计算和预测结果,他们一方面在线性插值法的基础上作了改进,对线性插值带来的误差进行修正,给出了具有自己特点的二次插值法,用于三角函数的近似计算;另一方面,也直接把二次插值法用于天文计算,这点与中国古代传统的天文历法的计算方法相似.中世纪阿拉伯的二次内插法分为自变量等间距二次内插法和自变量不等间距二次内插法两种.

7.3.1 自变量等间距二次内插法

前面我们谈到比鲁尼的线性插值法,同一部著作《马苏德教规》中,在线性插值的基础上,比鲁尼以简洁的语言描述了其正弦函数的二次插值系统.①这里,他另取差分 Δy_n 的前差分 Δy_{n-1},然后以两差分之差即 $\Delta y_{n-1}-\Delta y_n=-\Delta^2 y_{n-1}$,也就是二阶差分的负值乘以弧差 $(x-x_n)$(即插值区间的角度增量)并除以插值区间长度 d.前差分 Δy_{n-1} 减去此结果后乘以弧差 $(x-x_n)$ 再除以插值区间长度 d,所得结果加上插值区间的初始函数值 y_n,即得该区间内 x 点的函数值 y.以现代符号用公式表示即为

$$\begin{aligned} y &= y_n+\frac{x-x_n}{d}\left[\Delta y_{n-1}-\frac{x-x_n}{d}(\Delta y_{n-1}-\Delta y_n)\right] \\ &= y_n+\frac{x-x_n}{d}\cdot\Delta y_{n-1}+\frac{(x-x_n)^2}{d^2}\cdot\Delta^2 y_{n-1}. \end{aligned}$$

借助于间隔为 1°的正切函数表,比鲁尼还给出了形式相同的正切函数插值公式.

与比鲁尼同时代的伊本·雨依斯已经认识到正弦函数的线性插值总是小于真实值,并可能从计算中观察到在靠近插值中间点的误差最大.为了修正由线性插值法产生的这一误差,使得计算结果更为精确,伊本·雨依斯进一步描述了正弦函数的二次插值系统.②其插值过程若以现代符号和语言叙述大体如下:

① E. S. Kenndy, "The Motivation of al-Bīrūnī's Second Order Interpolation Scheme", *Proceedings of the First International Symposium*.

② J. L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, pp. 146—151.

首先利用线性插值法求出正弦函数在连续整度数 x_n, x_{n+2}①之间的值 y'（对应于 x 点的线性插值）和 y'_{n+1}，即

$$y' = y_n + \frac{x - x_n}{2d}(\Delta y_{n+1} + \Delta y_n),$$

$$y'_{n+1} = y_n + \frac{x_{n+1} - x_n}{2d}(\Delta y_{n+1} + \Delta y_n) = \frac{1}{2}(\Delta y_{n+1} + \Delta y_n) + y_n,$$

并从表中查出 y_{n+1} 的值. 以几何量表示即（如图 7-2）$DD' = y'_{n+1}$，$CC' = y'$，$ED' = y_{n+1}$.

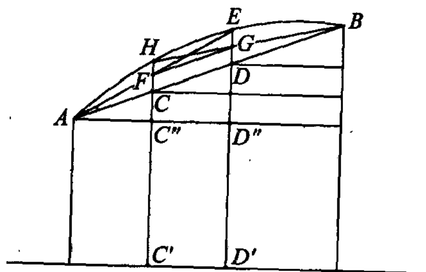


图 7-2

其次，伊本·雨依斯定义插值的基：

$$B = 4(y_{n+1} - y'_{n+1}) = 4B',$$

B' 即为图 7-2 中的几何量 ED. 然后计算

$$B(x - x_n)(2d - x + x_n) = 4B'(x - x_n)(2d - x + x_n)$$

的值. 下依图 7-2 给出此值的几何量表示.

由 $\triangle ACC'' \backsim \triangle ADD''$，得 $\frac{AC}{AD} = \frac{AC''}{AD''} = \frac{x - x_n}{d}$，又 $\frac{AC}{AD} = \frac{FC}{ED}$，所以 $FC = \frac{AC}{AD} \cdot ED = \frac{x - x_n}{d} \cdot B'$. F 为 AE 与 CC'' 反向延长线的交点，作 $FG // AB$，BG 交 CF 的延长线于点 H，则 $\frac{BD}{BC} = \frac{GD}{HC} = \frac{FC}{HC}$，而 $\frac{BD}{BC} = \frac{d}{2d - x + x_n}$，所以

$$HC = \frac{BC}{BD} \cdot FC = \frac{(x - x_n)(2d - x + x_n)}{d^2} \cdot B'.$$

① 伊本·雨依斯的正弦表间隔为 1°，其插值过程所用间隔为 $(\frac{1}{2})°$，这里将其插值间隔 d 视作 $(\frac{1}{2})°$.

几何量 HC 即为 $B(x-x_n)(2d-x+x_n)$.

最后，伊本·雨依斯取 $y'+B(x-x_n)(2d-x+x_n)$ 为 x 点的函数值，即

$$
\begin{aligned}
y &= y'+B(x-x_n)(2d-x+x_n) \\
&= y_n+\frac{x-x_n}{2d}(\Delta y_n+\Delta y_{n+1}) \\
&\quad +4(x-x_n)(2d-x+x_n)\left[y_{n+1}-y_n-\frac{1}{2}(\Delta y_n+\Delta y_{n+1})\right] \\
&= y_n+\frac{x-x_n}{2d}(\Delta y_n+\Delta y_{n+1})-2(x-x_n)(2d-x+x_n)\cdot\Delta^2 y_n \\
&= y_n+\frac{x-x_n}{2d}(\Delta y_n+\Delta y_{n+1})-\frac{(x-x_n)(2d-x+x_n)}{2d^2}\cdot\Delta^2 y_n.
\end{aligned}
$$

由以上过程，我们可以认为伊本·雨依斯的二次插值法可能是在其线性插值基础上建立起来的，是对其线性插值的修正（下文我们将通过对比进一步说明这一点）. 他定义插值的基 B 实际上就是给出修正式的系数，而计算 $B(x-x_n)(2d-x+x_n)$ 的值，即是求修正值. 伊本·雨依斯插值过程的描述看来与其正弦表之间有一点矛盾，正弦表间隔为 $1°$，而插值过程的叙述则有从表中查出 y_{n+1} 即 $\sin\left(x_n+\frac{1}{2}°\right)$ 之值的步骤. 然而，我们分析其迭代式

$$F(x)=B(x-x_n)(2d-x+x_n),$$

则有

$$F(x_n)=F(x_{n+2})=0.$$

所以，只需在 x_n，x_{n+2} 之间任意选择一点，迭代式 $F(x)$ 都可以确定. 点 x_{n+1} 也许是雨依斯在插值点 x_n，x_{n+2} 之间加入的一个结点，而 y_{n+1} 的值是容易得到的. 为了便于叙述，上面的说明中我们仍把点 x_{n+1} 作为一插值点，从而将插值区间看作是 $\left(\frac{1}{2}\right)°$.

进一步分析迭代函数 $F(x)$，则有 $F(x)$ 为开口向下的抛物线，当 $x=x_{n+1}$ 时取最大值 $\frac{B}{4}$，且可以得到下面的结论：

当 $x=x_{n+1}$ 时，$y=\sin x_{n+1}$；

当 $\left(\frac{1}{2}\right)°<x-x_n<1°$ 时，$y'_{n+1}<y<\sin x$；

当 $0<x-x_n<\left(\frac{1}{2}\right)°$ 时，$y>\sin x$.

结合第一部分关于伊本·雨依斯线性插值的分析，则 $f(x)$ 与 $F(x)$ 的图象关系大致如图 7-3 所示. 图中阴影部分即为正弦函数真实值与二次插值之差的大致分布. [1]或记 $G(x)=f(x)-F(x)=\sin x-L_2\sin x$，则 $G(x)$ 的图象大致如图 7-4 所示.

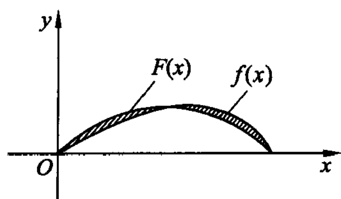


图 7-3

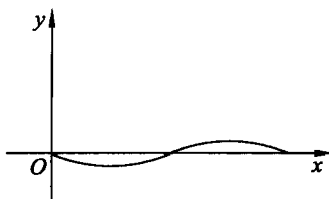


图 7-4

7.3.2 自变量不等间距二次内插法

阿拉伯学者的线性插值法与自变量等间距二次插值法大都用于三角函数的近似计算. 13 世纪的阿拉伯学者纳西尔丁不同于他的前辈，在其天文学著作《伊儿汗历》(*Zij-i Ilkhānī*，1271 年)第二章第四部分确定星体的位置时描述了自变量不等间距二次内插系统[2]，他称其为差分弧法(difference arc). 当 5 天间隔的平均每天运行增长数不同于另外 5 天时，他使用了这种方法. 以现代的语言和符号叙述，则其一般过程如下：

设 Δy_1，Δy_2 分别为相邻间隔 d_1，d_2 天的星体运行增长度数. 构造

$$e=\frac{\dfrac{\Delta y_2}{d_2}-\dfrac{\Delta y_1}{d_1}}{\dfrac{d_1+d_2}{2}},$$

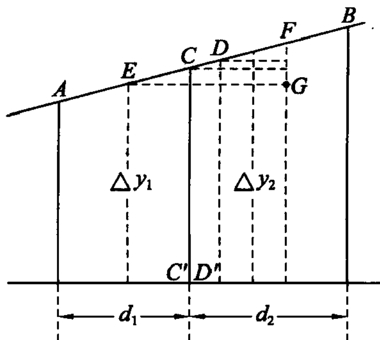


图 7-5

① 通过计算机绘图可知二次插值的误差的最大基数仅为 10^{-8}，它是精度相当高的正弦函数的逼近算法.

② Javad Hamadanizadeh, "A Second-order Interpolation Scheme Described in the *Zij-i Ilkhānī*", *Historia Mathematica*, 12(1985), pp. 56—59.

即为图 7-5 中$\frac{FG}{EG}$,则间隔 d_2 天中第一天、第二天、…、第 k 天的增长度数

$$\delta_1=S_{CC'D'D}=\frac{\Delta y_1}{d_1}+\frac{d_1}{2}e+\frac{1}{2}e=\frac{\Delta y_1}{d_1}+\frac{1}{2}(d_1+1)e,$$

$$\delta_2=\frac{\Delta y_1}{d_1}+\frac{d_1}{2}e+\frac{1}{2}e+e=\frac{\Delta y_1}{d_1}+\frac{1}{2}(d_1+3)e,$$

……

$$\delta_k=\frac{\Delta y_1}{d_1}+\frac{1}{2}[d_1+(2k-1)]e.$$

已知 $f(x_1)$,则间隔(x_1,x_2)中第 k 天星体位置经度

$$\begin{aligned}f(x_1+k)&=f(x_1)+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_k\\&=f(x_1)+k\cdot\frac{\Delta y_1}{d_1}+\frac{1}{2}[kd_1+1+3+\cdots+(2k-1)]e\\&=f(x_1)+k\cdot\frac{\Delta y_1}{d_1}+\frac{1}{2}(kd_1+k^2)e.\end{aligned}$$

若记 $y=f(x)$,设 $x=x_1+k$,则有

$$\begin{aligned}y&=f(x_1)+\frac{x-x_1}{d_1}\cdot\Delta y_1+\frac{1}{2}(x-x_1)(d_1+x-x_1)e\\&=f(x_1)+\frac{x-x_1}{d_1}\cdot\Delta y_1+\frac{d_1(x-x_1)}{d_1+d_2}\left(\frac{\Delta y_2}{d_2}-\frac{\Delta y_1}{d_1}\right)\\&\quad+\frac{(x-x_1)^2}{d_1+d_2}\left(\frac{\Delta y_2}{d_2}-\frac{\Delta y_1}{d_1}\right).\end{aligned}$$

上述过程当 $d_1=1,d_2=5$ 时,即为纳西尔丁实际采用的二次插值算法.

$$y=f(x_1)+(x-x_1)\cdot\Delta y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_1+1)}{2}\cdot\frac{\overline{\Delta y_2}-\Delta y_1}{3},$$

这里 $\Delta y_1=f(x_1)-f(x_1-1)$,$\overline{\Delta y_2}=\frac{f(x_1+5)-f(x_1)}{5}$. 纳西尔丁并由间隔$(x_1,x_1+5)$中第 k 天的增长数

$$\delta_k=\Delta y_1+k\cdot\frac{\overline{\Delta y_2}-\Delta y_1}{3},k=1,2,3,4,5,$$

验证了第 3 天的增长度数 δ_3 等于 5 天的平均增长度数$\overline{\Delta y_2}$,即

$$\delta_3=\Delta y_1+3\cdot\frac{\overline{\Delta y_2}-\Delta y_1}{3}=\overline{\Delta y_2}.$$

结合前文的分析可以看出,纳西尔丁的二次插值与比鲁尼和伊本·雨依斯

的二次插值系统有着较大的差别. 首先,插值法应用的区域不同,这是显然的;其次,获取插值公式的过程不同,比鲁尼和伊本·雨依斯均是通过构造修正式对其线性插值公式进行修正,而纳西尔丁则实际上相当于利用函数的迭加(或数列的递推)给出了其插值公式的具体推算过程. 由此看来,纳西尔丁的不等间距二次内插系统没有受到其前辈插值思想的影响.(但也有一点,纳西尔丁插值过程开始构造的 e 和伊本·雨依斯所定义的插值的基 B 作用是一致的)

§7.4 比较与结论

7.4.1 线性插值

线性插值只有用于随自变量变化函数值变动不大的函数(如正弦、余弦等)才能得到较好的效果,而对于随自变量的变化函数值变动较大的函数,线性插值所得函数值与真实值就会产生较大的误差. 如刘洪的插值公式,由于在一整日时间内月球速度变动很大,所以误差也比较大. 因此,线性插值对于随自变量变化函数值变动不大的函数不失为一种较好的逼近方法.

由前文的叙述,虽然阿拉伯学者的线性插值公式与希腊学者托勒密和印度学者婆罗摩笈多等的公式形式上均一致,但我们仔细分析却可以得出不同的结论:

1. 阿拉伯学者的线性插值系统其插值过程与托勒密的实质上是一致的. 托勒密的著作《大汇编》早在公元 780 年就被从希腊文译成阿拉伯文,之后,这部著作在阿拉伯学者那里逐渐成为他们进行天文、历法研究的重要资料之一,许多阿拉伯天文学家均不同程度地受其影响. 阿拉伯学者的线性插值法可能就在其影响之列.

2. 婆罗摩笈多插值系统的描述旨在二次插值,并未明确给出其线性插值公式. 如果阿拉伯学者受其著作中插值思想的影响,那么,他们首先了解的应该是其二次插值系统. 二次插值在计算精确度上较线性插值具有明显的优越性. 阿拉伯学者即使不能对婆罗摩笈多的二次插值作出改进,至少也应该取而用之,不至于舍弃二次插值而取相对来说计算精确度差的线性插值. 由此,我们认为阿拉伯学者的线性插值不可能受印度学者,特别是婆罗摩笈多的插值思想的影响.

另外,中国虽然较早地使用线性插值来进行天文历法计算,但三角函数概念在中国的使用较晚,中国早期的插值法与三角函数之间毫无关系. 阿拉伯早

期的线性插值与中国早期的线性插值二者在使用领域上相差甚远.因此,也不可能受到中国插值思想的启示.

综上所述,阿拉伯早期的线性插值是在继承希腊天文学思想的基础上,在寻求如何较为精确地计算出三角函数值时,受希腊插值思想的影响而建立起自己的三角函数计算的逼近方法——线性插值法.

7.4.2 二次插值

对比比鲁尼和婆罗摩笈多的二次插值公式,二者都使用了前一区间的差分 Δy_{n-1},不同的是比鲁尼公式的第二项只使用了差分 Δy_{n-1},婆罗摩笈多则采用了 Δy_n 和 Δy_{n-1} 的平均值,即区间 y_{n-1} 到 y_{n+1} 变化的平均值 $\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_{n-1})=\frac{1}{2}(\Delta y_n+\Delta y_{n-1})$ 代替线性插值中的 Δy_n.事实上,婆罗摩笈多的插值公式要比比鲁尼的更为优越.我们只需将婆罗摩笈多的二次插值公式分别减去比鲁尼的线性和二次插值公式,即可看出两个结果除符号不同外,均为

$$\frac{(x-x_n)(2d-x+x_n)}{2d^2}\cdot\Delta^2 y_{n-1}.$$

比鲁尼的二次插值公式在逼近程度上并没有比其线性插值取得更大的进展.分析其原因,作者认为虽然比鲁尼给出了正弦函数的线性插值公式,也认识到他的线性插值公式求出的函数值总是小于正弦函数的真实值,且

$$\begin{aligned}\Delta y_{n-1}-\Delta y_n &=2\sin x_n-(\sin x_{n+1}+\sin x_{n-1})\\&=2\left[\sin x_n-\cos\left(\frac{x_{n+1}-x_{n-1}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x_{n+1}+x_{n-1}}{2}\right)\right]>0,\end{aligned}$$

所以,他将其线性插值公式第二项中的 Δy_n 在二次插值公式中换作 Δy_{n-1},以增大二次插值公式的前两项数值.然而,他也许没有清楚地认识到对此增大值若再以 $\frac{(x-x_n)^2}{2d^2}\cdot\Delta^2 y_{n-1}$ 修正将会产生较大误差.另外,如果比鲁尼的二次插值受到婆罗摩笈多插值思想的影响,那么,它至少不应劣于婆罗摩笈多的插值系统,然而,我们的分析结果却恰恰相反.因此,比鲁尼的二次插值思想来源并不在印度,可能是他对线性插值公式直接修正的结果.

再来分析雨依斯的二次插值系统.明显地,雨依斯的插值过程和婆罗摩笈多的不同,虽然都是对线性插值法的修正,但雨依斯是在线性插值公式的基础

上增加一个修正式，而婆罗摩笈多是通过对线性插值公式中的 Δy_n 进行修正，即以另一个修正式代替线性插值公式中的 Δy_n. 另外，两公式最终的表达形式也有所不同. 因此，可以排除婆罗摩笈多插值思想对雨依斯的影响.

下面分析中国学者和雨依斯的二次插值法. 雨依斯和中国刘焯的二次插值法，虽然两位学者的插值公式可以通过转换而使得两公式的最终表达形式相同，但一者用于三角函数，一者直接用于天文计算，二者应用的区域相差较远. 另外，二者的插值过程也不同. 虽然最终都是对线性插值的修正，但雨依斯是通过直接构造辅助函数而得到其结果，刘焯则是通过实质上相当于数列的递推而达到其目的. 两种插值法插值的区间范围也有所不同，前者以 Δy_n，Δy_{n+1} 推求两相邻区间（x_n，x_{n+1}）和（x_{n+1}，x_{n+2}）中任一点正弦值，而后者则以 Δy_n（所在气陟降率）、Δy_{n+1}（后气率）推求（x_n，x_{n+1}）（所在气）中任一时刻的迟速数. 雨依斯修正式和曹士蒍的太阳视运动中心差算式形式上虽然相似，但二者的应用区域等也不相同. 总之，雨依斯的插值公式可能没有受到中国插值思想的启示. 雨依斯在其著作中没有说明其二次插值系统的思想来源，我们认为：一者，他对抛物线 $y=(x-x_n)(2d-x+x_n)$ 的性质有了很清楚的了解，其二次插值公式是通过对线性插值计算的观察，掌握其特点后，直接利用抛物线性质对线性插值公式进行修正而构造了此二次函数；另者，他通过几何的方法得到其修正式，并结合线性插值公式给出二次插值公式.

纳西尔丁的二次插值系统却与中国天文学者的二次插值系统具有很大程度的相似之处. 虽然由于所选取的差分值不同而使得中国学者和纳西尔丁最终得到形式不同的插值公式，但他们的推算过程是一致的，都是利用实际上相当于数列的递推过程而得到其结果，且都是将其插值法直接应用于天文计算. 事实上，到了纳西尔丁的时代，“蒙古军队已攻陷巴格达，旭烈兀汗在纳西尔丁·图西的建议下在蔑剌哈山麓筑造了天文台，旭烈兀汗曾自中国携天文学家数人至波斯”，“纳西尔丁之能知中国纪元及天文历数者盖得之于是人也”. ①因此，纳西尔丁的插值思想极有可能源于中国.

总之，对于阿拉伯的插值法，我们认为其线性插值可能受到希腊思想的影响；等间距二次内插法是在线性插值的基础上直接修正而来；纳西尔丁的不等间距二次内插法很可能受到中国插值思想的影响.

---

① 钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社，1992，第 220 页.

第八章　结　论

阿拉伯在代数学不同领域的成就的评价

谈到对阿拉伯数学成就的评价问题，本书的开始我们就已经指出，随着中世纪阿拉伯数学文献的不断被发现和研究，不应再局限于传统的看待阿拉伯数学的观点，应该从新的角度，即比较研究（和希腊、巴比伦以及同时期或之前的印度和中国等）的角度客观地、合理地评价．对于阿拉伯数学的某一分支亦应如此．前文关于阿拉伯代数学四个方面的比较分析可以看出，阿拉伯学者在代数学方面的成就是突出的．

1．方程论

二次方程，虽然古巴比伦、希腊（丢番图）、印度等都曾给出其精确解法，但像阿拉伯学者（花拉子米等）那样一般化、系统化的论述却从未出现．他们不但给出一般的方法，更重要的是引入了一些代数运算规则和方程术语（如移项、合并同类项等）．花拉子米的著作《代数学》自 12 世纪传入欧洲之后，几个世纪一直作为欧洲人的标准课本使用．三次方程，直到文艺复兴时期，并未出现一般的代数解法．希腊学者虽以几何的形式给出某些特殊类型的几何解法，但不具一般性．阿拉伯学者奥马·海亚姆则针对明确的代数方程首次给出了一般三次方程（有正根）的几何解法（利用圆锥曲线或圆相交的方法），并引入了数和几何量之间自由过渡的“面数”和“立体数”等概念．之后，沙拉夫丁·图西虽是以几何的形式讨论了三次方程的正根，但其思想的实质却是函数概念的引入和问题的转化．总起来说，在二次方程的代数解法和三次方程的几何解法上，阿拉伯学者的成就是同时期或之前以至于文艺复兴之前的其他国家的学者所无法比拟的．他们这方面的工作对文艺复兴时期方程论的发展具有重要意义．

2. 多项式理论和二项式定理

多项式理论，阿拉伯学者首先将其作为代数计算的理论加以论述，尽管他们的探讨是浅显的、最基本的，没有在更深的层次上进行思考，但他们的工作仍具有重要意义.一方面，多项式理论首次被作为专门的课题加以研究；另一方面，他们的工作丰富了实数代数结构，为代数结构从有理量到无理量的扩张做了最初的尝试.希腊、印度、中国等的方程论中自是不可避免地涉及到多项式的一些初等运算.二项式定理(或系数三角形)，阿拉伯和中国几乎同时出现，但阿拉伯人和中国人获得系数三角形的方式不同.他们可能各自独立地完成了自己的工作.然而，像阿拉伯学者那样将多项式和二项式定理作为专门的研究课题，如此完整、系统地探讨却没有出现.

3. 插值法

希腊、印度、中国等都较早地给出过插值法，阿拉伯学者在这方面并未作出更好的推进，但也具有自己的特点.对于等间距二次内插法，他们没有采取印度和中国推算的过程，而是直接在其线性插值公式上添加修正式得到内插公式.另外，他们将插值法应用于三角函数值的计算，列出了大量的相当精确的三角函数表.

4. 开方法和方程数值解法

在这方面，中国学者取得的突出成就及所处的领先地位是毋庸置疑的.印度学者虽然较早地给出了开方法，但没有将其发展到开高次方和方程的数值解法.阿拉伯学者完成了由早期的开低次方法到12世纪的开高次方法——鲁菲尼—霍纳算法的逐步推广和发展，最终实现了寻求开方法的简单的、程序化的计算模式的目的.遗憾的是阿拉伯学者虽将开平方、开立方推广到二、三次方程的数值解法，但没有实现开高次方到高次数值方程解法的突破.阿拉伯学者在开高次方和二、三次方程数值解法上除不及中国之外，已遥遥超出同时期或之前的其他国家.

总之，阿拉伯学者在代数学上并非是缺乏创造精神的其他国家数学的模仿者，他们在许多方面的成就是卓越的，和同时期的其他国家相比是毫不逊色的.

当然，我们不能以现代数学的成就来衡量中世纪阿拉伯代数学的贡献，那样也是不客观、不合理的.

阿拉伯代数学的主要思想来源

阿拉伯数学的思想来源问题是中世纪阿拉伯数学研究中的一个重要问题，对此众说纷纭. 传统的观点通常认为主要来源于希腊、印度，另外还有巴比伦、埃及数学等. 同样，对于阿拉伯代数学的主要来源也是各抒己见、莫衷一是. 通常认为主要来源于希腊传统、印度传统或巴比伦传统等，而对于中国古代数学和阿拉伯数学之间的关系则研究较少. 数学史家钱宝琮和科学史家李约瑟等则主要从文献考证方面提出中国古代数学可能在诸多方面影响到阿拉伯.①概括地说，阿拉伯数学并非某一传统数学思想的延续、发展，它是许多传统的融合，含有多民族文化的因素. 追究阿拉伯数学各个不同领域、不同成果的思想来源是一件十分困难、繁锁的事情. 本书从问题的方法、过程本身对阿拉伯代数学中的一些问题进行了比较研究，就这些问题的可能思想来源，作者也只能舍其末而取其本，舍其次要而究其主要. 通过比较，我们认为阿拉伯代数学发展的两条线索是：希腊思想的延续；东方特色.

1. 希腊思想的延续

(a) 方程论. 前文的比较分析可以看出，阿拉伯代数学中希腊思想的延续主要体现在三次方程的几何解法以及部分阿拉伯学者二次方程代数解法的几何解释上. 以奥马·海亚姆为代表的阿拉伯学者在求解三次代数方程时继承发展了希腊早期的几何代数方法，对于各种不同类型的三次方程都分别设计不同的圆锥曲线(或圆)，利用曲线相交的方法解决了一般三次方程. 在二次方程代数解法的几何解释上，一些阿拉伯学者则借助希腊几何来完成. 但这只是在阿拉伯学者那里成为其思想主流之一，随后逐渐减弱，到了欧洲文艺复兴时期则慢慢消逝，并未发展为数学中的主线延续下来.

(b) 插值法. 线性插值，阿拉伯学者可能受到希腊思想的影响. 早在公元

① 钱宝琮：《中国数学史》，第 217—244 页；或李约瑟：《中国科学技术史》(一)，第 477—493 页.

780年就被译成阿拉伯文的希腊天文学著作《大汇编》中使用了线性插值计算正弦函数值. 阿拉伯的线性插值也许受其影响.

2. 东方特色

阿拉伯数学的一个显著特征就是它的东方数学特色,即寓理于算的算法化倾向、实用性特点和数值化特征. 这是其另一思想主流. 阿拉伯学者并非都是希腊长于逻辑推理数学的忠实信徒,他们很多反对近乎纯粹逻辑推理的数学的介入,主张数学的实用性. 较早的阿拉伯学者花拉子米在其著作《代数学》中明确提出他的著作的目的是服务于人们的实际目的和需要,并列举了大量的实际问题利用其方程理论来解决.

(a) 二次方程. 阿拉伯学者给出了具体的算法,并提供了算法的几何证明. 虽然中国古代数学并未明确给出二次方程的代数解法(实际上中国低次方程的"开带从方法"当求得的根为精确值时,与求根公式是一致的),但阿拉伯学者的几何证明方法(以花拉子米为代表)与中国的"出入相补原理"一致,且这种先给出算法再提供几何依据的思想恰与中国古代传统数学吻合.

(b) 开方和方程的数值解法. 从前文的分析可以很清楚地看出,阿拉伯学者的开方法以及方程的数值解法目的旨在寻找一种简单的程序化、机械化的算法,而算法又大都是以具体的数值问题体现出来,这正是中国数学的主要特征之一. 自早期的阿拉伯开方法起,在计算过程步骤上就与印度的开方法有较大差别,而与中国的非常相似. 12世纪的开高次方几乎与中国的算法完全一致,且阿拉伯学者给出的二、三次方程的数值解法也与中国的传统呈现出很大程度的相同或相似. 开高次方和方程的数值解法在同时期或之前的印度却没有出现. 虽然对于开高次方和方程数值解法来说,阿拉伯人和中国人可能各自独立地得到了他们的方法,但这一系列成果的相同和相似似乎绝非偶然,二者存在着某种联系,也就是阿拉伯早期的开方法很可能受到中国早期开方术的影响.

(c) 二项式定理. 阿拉伯人和中国人可能各自独立地发现了系数三角形. 前者的系数三角形与其早期的开方是一脉相承的,后者来自其"开方术"是毋庸置疑的. 虽然二者的阶数、放置方式和构成方法不同,但前者的构造过程与后者的"求廉细草"过程相同,且二者数字的排列方式完全相同. 阿拉伯系数三角形的最终根源应该在中国.

(d) 插值法. 从前文对插值法的比较分析可以看出,纳西尔丁不等间距二次

插值法不但推算过程和中国学者的一致，而且公式的最终表达形式也和中国某些学者的相似，且亦有纳西尔丁的天文知识得知于中国天文学家的记载.因此，我们认为他的二次插值法渊源于中国.

传统的观点认为阿拉伯代数学受印度或希腊的影响较多，但由我们的分析知，阿拉伯代数学的一系列成果，如开高次方、方程的数值解法、二项式定理以及二次方程的几何证明等，在同时期或之前的印度都没有出现，当然希腊影响的说法更应排除；相反，却均与同时期或之前中国数学的相应成果呈现出某种程度的相似或相同(有些几乎全同，如开高次方)，且这些相似或相同并非仅仅是形式上的，更是本质上的.因此，阿拉伯代数学和中国古代数学似乎存在着某种渊源.较之于希腊和印度数学，中世纪阿拉伯代数学很大可能受到中国数学的影响为多，并最终传给欧洲.

由前面的分析，对于阿拉伯数学所取得的成就我们应该给予充分的肯定.另外，西方人通常认为中国古代数学没有对世界数学特别是近现代数学主流产生影响，起过作用，我们对此持否定态度.也许中国古代数学没有直接影响到欧洲数学，但通过对中世纪阿拉伯数学的影响，中国古代数学对后来欧洲数学的发展间接地起到了一定的促进作用.

主要参考文献

原始文献

[1] Colebrooke H T. Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara. London: John Murray,1973

[2] Girolamo Cardano. The Great Art or the Rules of Algebra. Translated and edited by T. R. Witmer. Cambridge: The MIT Prees,1968

[3] Hogendijk J P. Ibn al-Haytham's Completion of the Conics // Source in the History of Mathematics and Physical Sciences: Vol. 7. New York: Springer-Verlag, 1985

[4] Karpinski L C. Robert of Chester's Latin translation of the Algebra of al-Khowarizmi. New York: The Macmillan Company, 1915

[5] Kasir D S. The Algebra of Omar Khayyam. Teachers College, Columbia University, 1931

[6] Levey M. The Algebra of Abū Kākmil: Kitāb fī al-Jābr wa'l-muqābala in a Commentary by Mordecai Finzi. Madison: The University of Wisconsin Press, 1966

[7] Ragep F J. Nasīr al-Din al-Tūsī's Memoir on Astronomy // Source in the History of Mathematics and Physical Science: Vol. 12. New York: Springer-Verlag, 1993

[8] Rosen F. The Algebra of Mohammed ben Musa. London: Oriental Translation Fund, 1831

[9] Saiden A S. The Arithmetic of al-Uqlīdisī. Massachusetts: D. Reidel, 1978

研究文献

[1] 金宜久. 伊斯兰教史. 北京:中国社会科学出版社,1993

[2] 克莱因 M. 古今数学思想:第一册. 上海:上海科技出版社,1972

[3] 李约瑟. 中国科学技术史:第 1,3 卷. 北京:科学出版社,1978

[4] 欧几里得. 几何原本. 兰纪正,朱恩宽,译. 西安:陕西科学技术出版社,1990

[5] 钱宝琮. 中国数学史. 北京:科学出版社,1992

[6] 钱宝琮校点. 算经十书:上册. 北京:中华书局,1963

[7] 曲安京,纪志刚,王荣彬. 中国古代数理天文学探析. 西安:西北大学出版社,1994

[8] 吴文俊. 世纪著名科学家传:数学:Ⅲ,Ⅳ. 北京:科学出版社,1992

[9] Bag A K. Mathematics in Ancient and Medieval India. Varanasi: Chaukhamabha Orientalia, 1978

[10] Berggren J L. Episodes in the Mathematics of Medieval Islam. New York: Springer-Verlag, 1986

[11] Dictionary of Scientific Biography. New York: Scribners, 1970

[12] Nasr S H. Science and Civilization in Islam. Cambridge: Harvard University Prees, 1968

[13] Rashed R. The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra. Translated by A. F. W. Armstrong. [S. l.]: Kluwer Academic Publishers, 1994. 或其法文版 Entre Arithmétique et Algèbre: Recherches sur L'kistoire des Mathématiques Arabes. Paris: Les Belles Lettres,1984

[14] Smith D E. History of Mathematics: Vol. I. Boston: Ginn and Company, 1923

[15] Van der Waerden. Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. New York: Springer-Verlag, 1983

[16] Van der Waerden. A History of Algebra. New York: Springer-Verlag, 1985

致谢

本书是在作者博士论文的基础上修改和完善完成的.这里要特别感谢我的导师李文林先生.先生给我指出了阿拉伯数学学习研究的新方向,在我的学术研究中开辟了广阔天地,并在问题研究方法上给了我许多具体的指导和开创性的建议.感谢中国科学院数学与系统科学学院为我提供了两个月的访问时间,使我在此期间完成了本书的修改和完善工作.

上海交通大学的纪志刚教授百忙之中阅读了作者博士论文的部分手稿,并提供了恰当的修改意见.曲阜师范大学的张素亮教授十分关注本书的出版.山东教育出版社的霍亮先生和其他工作人员对本书的出版给予了很大支持和帮助.在此对曾给我帮助的所有人员一并表示感谢.

[General Information]
书名=阿拉伯数字的兴衰
作者=包芳勋
页数=121
SS号=12415498
DX号=
出版日期=2009.04
出版社=山东教育出版社